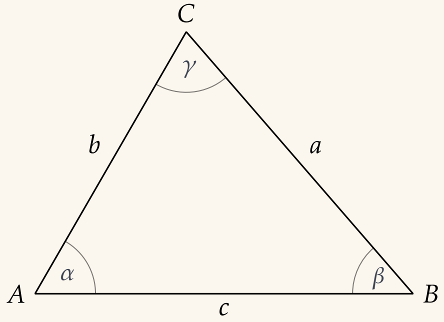
8 Trigonométrie dans un triangle quelconque

Introduction Dans tout le chapitre, on se placera dans un triangle quelconque ABC, en utilisant les notations suivantes :

- $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
- $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$ et $\widehat{ACB} = \gamma$.



I Calcul de longueurs et d'angles

I.1 Théorème du sinus

Théorème 8.1 – Théorème du sinus

Soit ABC un triangle.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

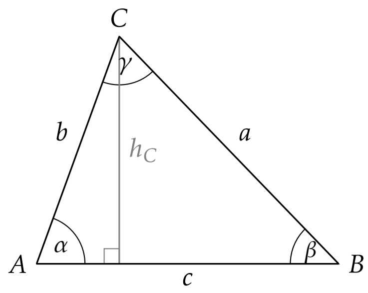
Démonstration

Soit h_C la hauteur issue de C.
On a alors :

$$\sin(\alpha) = \frac{h_C}{b}$$

et :

$$\sin(\beta) = \frac{h_C}{a}$$



Or $\sin(\alpha) = \frac{h_C}{b} \Leftrightarrow h_C = b\sin(\alpha)$.
De même : $\sin(\beta) = \frac{h_C}{a} \Leftrightarrow h_C = a\sin(\beta)$.
On a donc $b\sin(\alpha) = a\sin(\beta)$, soit $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.
En considérant la hauteur issue de B, on montre de même que $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$. □

Méthode On peut utiliser ce théorème lorsque l'on connaît un angle et son côté opposé, ainsi qu'une autre mesure/longueur, afin d'en déduire une quatrième donnée.
Exemple : je connais α et son côté opposé a. Je connais également b. Je peux en déduire β l'angle opposé à b :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Leftrightarrow \sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a}$$

Exemple 8.1 :

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} = 35°$, $\widehat{ACB} = 28°$ et $BC = 12$.
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, et les longueurs AB et AC.
$\widehat{BAC} = 180 - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 180 - (35 + 28) = 117°$.
D'après le théorème du sinus :

$$\frac{AB}{\sin(\widehat{ACB})} = \frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})}$$

On en déduit : $AB = \frac{BC \cdot \sin(\widehat{ACB})}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{12 \cdot \sin(28°)}{\sin(117°)} \approx 6{,}32$.
De même : $\frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})}$.
On a donc : $AC = \frac{BC \cdot \sin(\widehat{ABC})}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{12 \cdot \sin(35°)}{\sin(117°)} \approx 7{,}72$.

I.2 Théorème d'Al-Kashi ou théorème du cosinus

Théorème 8.2 – Théorème d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

En permutant, on a également :

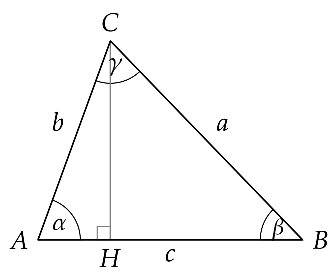
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

et

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

DÉMONSTRATION

Notons H le pied de la hauteur issue de C.



Dans le triangle CAH, on a : $CH^2 = b^2 - AH^2$.
Dans le triangle CBH, on a : $CH^2 = a^2 - (c - AH)^2 = a^2 - c^2 - 2c \cdot AH - AH^2$.
On a donc $b^2 - AH^2 = a^2 - c^2 - 2c \cdot AH - AH^2$.
On en déduit $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AH$.
Par ailleurs, puisque $\cos(\alpha) = \frac{AH}{b}$, on a $AH = b \cdot \cos(\alpha)$.
On en déduit :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

En montre de même que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$.
En considérant la hauteur issue de A ou celle issue de B, on montre enfin de la même manière que :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

□

Méthode

- Avec ce théorème, on peut trouver n'importe quelle mesure d'angle d'un triangle dès lors que l'on connaît les longueurs des trois côtés.
  Exemple : je connais a, b et c. Je peux trouver α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \Leftrightarrow -2bc\cos(\alpha) = a^2 - b^2 - c^2$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$$

- Si l'on connaît la mesure d'un angle et la longueur de deux côtés, on peut en déduire la longueur du troisième.
  Exemple : je connais a, b et α. J'utilise la relation faisant intervenir l'angle que je connais.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \Leftrightarrow c^2 - 2b\cos(\alpha)c - a^2 = 0$$

  On est ramené à la résolution d'une équation du second degré d'inconnue c, que l'on sait résoudre.
  On élimine les éventuelles solutions négatives puisque c est une longueur.
  On peut aussi vérifier par le calcul qu'un triangle n'est pas constructible si l'on ne trouve aucune longueur solution.

Exemple 8.2 :

Soit ABC tel que $AB = 5$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 45°$.

1. Déterminer BC à 10^{-2} près.

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos(45) \\ &= 34 - 30 \cdot \cos(45) \\ &\approx 3{,}58 \end{aligned}$$

2. En déduire une valeur approchée de $\widehat{ABC}$ à 10^{-2} près.
   D'après le théorème d'Al-Kashi : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ABC})$.

$$\begin{aligned} & AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ABC}) \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\left(\widehat{ABC}\right) = AB^2 + BC^2 - AC^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} \end{aligned}$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} &\approx \arccos\left(\frac{3^2 - 5^2 - 3{,}58^2}{2 \cdot 5 \cdot 3{,}58}\right) \\ &\approx 36{,}4° \end{aligned}$$

II Calcul d'aires

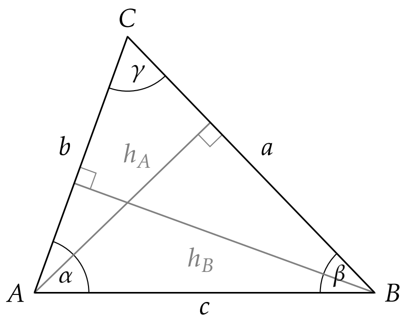
Théorème 8.3

Soit ABC un triangle. Notons $\mathcal{A}$ son aire.

$$\mathcal{A} = \frac{ac\sin(\beta)}{2} = \frac{bc\sin(\alpha)}{2} = \frac{ab\sin(\gamma)}{2}$$

Démonstration

On considère h_A, h_B les hauteurs respectivement issues de A, B.



- $\mathcal{A} = \frac{a \cdot h_A}{2}$.
  $h_A = b\sin(\gamma)$, mais aussi $h_A = c \cdot \sin(\beta)$.
  Donc $\mathcal{A} = \frac{ab\sin(\gamma)}{2}$ et $\mathcal{A} = \frac{ac\sin(\beta)}{2}$.

- $\mathcal{A} = \frac{b \cdot h_B}{2}$.
  $h_B = c\sin(\alpha)$.
  Donc $\mathcal{A} = \frac{bc\sin(\alpha)}{2}$.

□

Méthode On peut ainsi calculer l'aire d'un triangle dès que l'on connaît la longueur de deux côtés et l'angle formé par ces deux côtés.

Exemple 8.3 :

Soit ABC tel que $BC = 5$, $AC = 4$ et $\widehat{ABC} = 38°$.
Calculer l'aire du triangle ABC. Arrondir à 10^{-2} près.
On connaît la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$, mais on ne connaît pas la longueur des deux côtés adjacents à cet angle (on ne connaît que BC).
Or d'après le théorème d'Al-Kashi : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ABC})$.
On en déduit : $AB^2 - 2 \cdot BC\cos(\widehat{ABC}) \cdot AB + BC^2 - AC^2 = 0$.
Soit : $AB^2 - 10 \cdot \cos(38°) \cdot AB + 9 = 0$.
Il s'agit d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \cdot BC \cdot \cos\left(\widehat{ABC}\right) = -10\cos(38°) \approx -7{,}88 \\ c = BC^2 - AC^2 = 9 \end{cases}.$$

$\Delta = b^2 - 4ac \approx (-7{,}88)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 26{,}1$.
On obtient deux solutions : $AB \approx 1{,}39$ ou $AB \approx 6{,}49$.
NB : en traçant la figure (règle + rapporteur + compas), on retrouve ces deux configurations possibles.
Notons $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.

Dans le premier cas, on a : $\mathcal{A} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin\left(\widehat{ABC}\right)}{2} \approx \frac{1{,}39 \cdot 5 \cdot \sin(38°)}{2} \approx 2{,}14$.

Dans le second cas : $\mathcal{A} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin\left(\widehat{ABC}\right)}{2} \approx \frac{6{,}49 \cdot 5 \cdot \sin(38°)}{2} \approx 9{,}99$