A Théorèmes du sinus et du cosinus

A.1 Faire ses gammes

1 On considère un triangle ABC, avec les mêmes notations que celles vues en cours. Dans chacun des cas, calculer les grandeurs manquantes.

1. $\alpha = 32°$, $b = 35$ et $c = 55$.

   D'après le théorème d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$.
   On en déduit : $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)} \approx 31{,}38$.
   Pour trouver β, on peut utiliser au choix le théorème d'Al-Kashi ou le théorème du sinus.
   D'après le théorème du sinus : $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.
   On en déduit : $\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a}$.
   D'où : $\beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a}\right) \approx 36{,}24°$.
   On en déduit : $\gamma = 180 - (\alpha + \beta) \approx 180 - (32 + 36{,}24) = 111{,}76°$.

2. $a = 12$, $b = 7$ et $c = 9$.

   D'après le théorème d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$.
   On en déduit : $\alpha = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2 \cdot b \cdot c}\right) \approx 96{,}38°$.
   De même, d'après le théorème d'Al-Kashi : $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$.
   On en déduit : $\beta = \arccos\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2 \cdot a \cdot c}\right) \approx 35{,}43°$.
   Enfin : $\gamma = 180 - (\alpha + \beta) \approx 48{,}19°$.

3. $a = 12$, $b = 7$ et $c = 4$.

   D'après le théorème d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$.
   On en déduit : $\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$.
   Or $\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} \approx -1{,}41 < -1$.
   On sait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$.
   Il n'existe donc pas d'angle α dont le cosinus soit égal à $-1{,}41$.
   Cela traduit le fait que le triangle indiqué n'est pas constructible.
   On peut s'en convaincre en essayant de le tracer à l'aide d'une règle et d'un compas.
   Une manière simple d'expliquer que la construction est impossible est qu'en traçant un premier côté de 12 cm, il n'est pas possible que les deux autres côtés « se rejoignent » puisqu'ils ne mesurent à eux deux que $7 + 4 = 11$ cm.

4. $\alpha = 50°$, $\gamma = 45°$ et $c = 15$.

   $\beta = 180 - (50 + 45) = 85°$.
   D'après le théorème du sinus : $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$.
   Donc $a = \frac{c \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \approx 16{,}25$.
   De même $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$, donc $b = \frac{c \cdot \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \approx 21{,}13$.

5. $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$ et $\gamma = 80°$.

   On ne peut rien dire sur les longueurs. En effet, il existe une infinité de triangles avec ces mêmes angles (triangle semblables).

6. $\gamma = 70°$, $a = 14$ et $c = 32$.

   D'après le théorème du sinus : $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$.
   On en déduit : $\sin(\alpha) = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c}$.
   Donc : $\alpha = \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c}\right) \approx 24{,}27°$.
   On en déduit : $\beta = 180 - (\alpha + \gamma) \approx 180 - (24{,}27 + 70) = 85{,}73°$.
   D'après le théorème du sinus : $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$.
   D'où : $b = \frac{c \cdot \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \approx 33{,}96$.

7. $\alpha = 25°$, $a = 6$ et $b = 8$.

   D'après le théorème du sinus : $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.
   Donc $\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a}$.
   D'où : $\beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a}\right) \approx 34{,}3°$.
   On en déduit $\gamma = 180 - (\alpha + \beta) \approx 180 - (25 + 34{,}3) = 120{,}7°$.
   D'après le théorème d'Al-Kashi : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$.
   D'où :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)}$$
$$\approx \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos(120{,}7)}$$

$\approx 12{,}21$

8. $\alpha = 30°$, $\beta = 30°$ et $c = 20$.

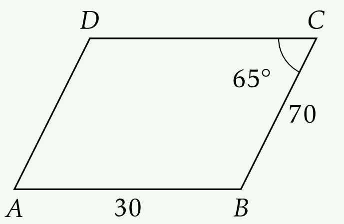
$\gamma = 180 - (\alpha + \beta) = 120$.
D'après le théorème du sinus : $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$.

Donc : $a = \dfrac{c \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \approx 11{,}55$.
De plus, $\alpha = \beta$, donc ABC est isocèle en C, donc $b = a$.

A.2 Exercices d'entraînement

2 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 30$ cm, $BC = 70$ cm et $\widehat{BCD} = 65°$.
Déterminer la longueur des diagonales de $ABCD$, au centimètre près.

On commence par faire une figure représentant la situation.



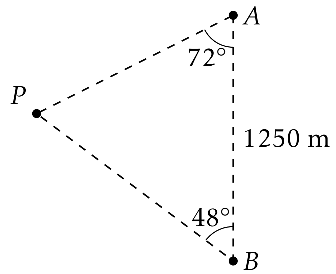
$ABCD$ est un parallélogramme, donc $CD = AB = 30$.
Dans le triangle BCD, d'après le théorème d'Al-Kashi, on a : $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos\left(\widehat{BCD}\right)$.

On en déduit : $\boxed{BD \approx 63}$.
Dans un quadrilatère, la somme des angles vaut 360°.
De plus, dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux.

Donc $\widehat{ABC} = \frac{360 - 2 \cdot \widehat{BCD}}{2} = 115°$.
Dans le triangle ABC, d'après le théorème d'Al-Kashi : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\left(\widehat{ABC}\right)$.

On en déduit : $\boxed{AC \approx 87}$.

3 En utilisant les informations données sur le dessin ci-dessous, déterminer la distance entre la bouée A et le phare P, et entre la bouée B et le phare P.



$\widehat{APB} = 180 - (\widehat{ABP} + \widehat{BAP}) = 60°$.
D'après le théorème du sinus, $\frac{AP}{\sin(\widehat{ABP})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{APB})}$.

On en déduit :

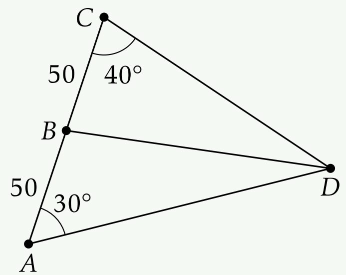
$$\begin{aligned} AP &= \frac{AB \cdot \sin\left(\widehat{ABP}\right)}{\sin\left(\widehat{APB}\right)} \\ &= \frac{1250 \cdot \sin(48°)}{\sin(60°)} \\ &\approx \boxed{1072{,}64} \end{aligned}$$

4 Soit ACD un triangle et B un point de $[AC]$, tels que :

- $AB = 50$ et $BC = 50$
- $\widehat{BAD} = 30°$
- $\widehat{BCD} = 40°$.

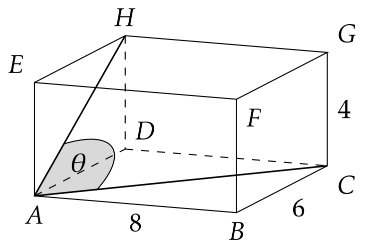
1. Déterminer $\widehat{ADC}$ puis en déduire AD et CD.
2. Calculer BD.

On commence par faire une figure représentant le situation :

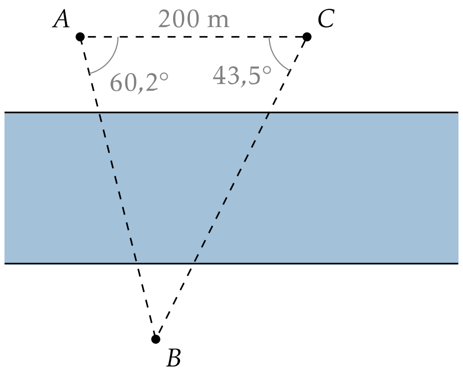


1. $\widehat{ADC} = 180 - (\widehat{CAD} + \widehat{ACD}) = 110°$.

5 Déterminer la mesure de l'angle θ formé par les deux diagonales dans le parallélépipède rectangle ci-dessous.

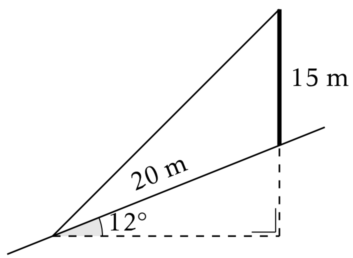


6 Un géomètre souhaite déterminer la distance entre un point A et un point B, situés sur les rives opposées d'un fleuve.
Il considère alors un point C du même côté que le point A et mesure les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$. Les grandeurs connues sont indiquées sur la figure ci dessous.



Calculer la distance AB.

7 On considère un poteau de 15 m planté dans une pente de 12°.
Calculer la longueur d'un câble tendu entre le sommet du poteau et un point situé 20 mètres plus bas.



B Calcul d'aires

B.1 Faire ses gammes

8 Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 30°$.
Calculer l'aire du triangle ABC.

9 Soit EFG un triangle tel que $FG = 4$, $EG = 6$ et $\widehat{EGF} = 26°$.
Calculer l'aire du triangle EFG.

10 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 3$, $AD = 4$ et $\widehat{BAD} = 25°$.
Calculer l'aire de $ABCD$.

B.2 Exercices d'entraînement

11 Soit EFG un triangle tel que $EF = 5$, $FG = 3$ et $\widehat{FEG} = 30°$.
Calculer l'aire du triangle EFG.

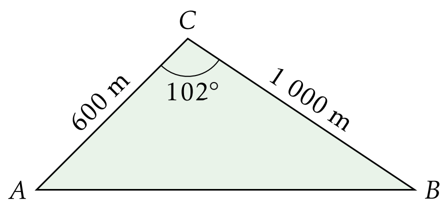
12 Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $\widehat{ABC} = 45°$ et $\widehat{BAC} = 30°$.
Calculer l'aire du triangle ABC.

13 Soit ABC un triangle et D un point de $[AB]$, tels que :

- $\widehat{CAD} = 20°$;
- $\widehat{BDC} = 30°$;
- $AB = 1500$ et $AD = AB \cdot \frac{1}{3}$.

1. Calculer CD puis BC.
2. Déterminer l'aire de ABC et l'aire de BCD.

14 Un champ est délimité par trois poteaux, qui sont représentés sur le schéma ci-dessous.



1. Quelle est la distance entre les poteaux A et B ?
2. Quelle est l'aire du champ ?