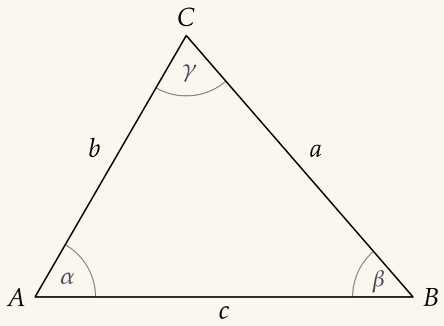
8 Trigonométrie dans un triangle quelconque

Introduction Dans tout le chapitre, on se placera dans un triangle quelconque ABC, en utilisant les notations suivantes :

- $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
- $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$ et $\widehat{ACB} = \gamma$.



I Calcul de longueurs et d'angles

I.1 Théorème du sinus

Théorème 8.1 – Théorème du sinus

Soit ABC un triangle.

....

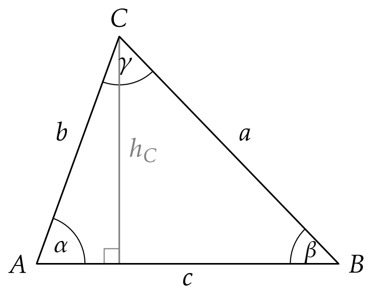
Démonstration

Soit h_C la hauteur issue de C.
On a alors :

$$\sin(\alpha) = \ldots$$

et :

$$\sin(\beta) = \ldots$$



Or $\sin(\alpha) = \ldots \Leftrightarrow h_C = \ldots\ldots\ldots$

De même : $\sin(\beta) = \ldots \Leftrightarrow h_C = \ldots\ldots\ldots$

On a donc $\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$, soit $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.

En considérant la hauteur issue de B, on montre de même que $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$. □

Méthode On peut utiliser ce théorème lorsque l'on connaît un angle et son côté opposé, ainsi qu'une autre mesure/longueur, afin d'en déduire une quatrième donnée.

Exemple : je connais α et son côté opposé a. Je connais également b. Je peux en déduire β l'angle opposé à b :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Leftrightarrow \sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a}$$

Exemple 8.1 :

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} = 35°$, $\widehat{ACB} = 28°$ et $BC = 12$.
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, et les longueurs AB et AC.

I.2 Théorème d'Al-Kashi ou théorème du cosinus

Théorème 8.2 – Théorème d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle.

....

En permutant, on a également :

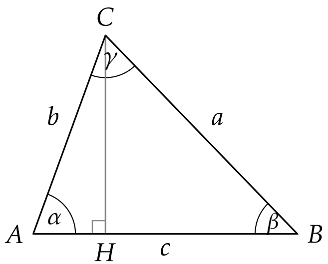
....

et

....

Démonstration

Notons H le pied de la hauteur issue de C.



Dans le triangle CAH, on a : $CH^2 =$ ....
Dans le triangle CBH, on a : $CH^2 =$ .... = ...
On a donc .... = ...
On en déduit $a^2 =$ ....
Par ailleurs, puisque $\cos(\alpha) =$ ..., on a $AH =$ ....
On en déduit :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

En montre de même que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$.
En considérant la hauteur issue de A ou celle issue de B, on montre enfin de la même manière que :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

□

Méthode

- Avec ce théorème, on peut trouver n'importe quelle mesure d'angle d'un triangle dès lors que l'on connaît les longueurs des trois côtés.
  Exemple : je connais a, b et c. Je peux trouver α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \Leftrightarrow -2bc\cos(\alpha) = a^2 - b^2 - c^2$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$$

- Si l'on connaît la mesure d'un angle et la longueur de deux côtés, on peut en déduire la longueur du troisième.
  Exemple : je connais a, b et α. J'utilise la relation faisant intervenir l'angle que je connais.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \Leftrightarrow c^2 - 2b\cos(\alpha)c - a^2 = 0$$

  On est ramené à la résolution d'une équation du second degré d'inconnue c, que l'on sait résoudre.
  On élimine les éventuelles solutions négatives puisque c est une longueur.
  On peut aussi vérifier par le calcul qu'un triangle n'est pas constructible si l'on ne trouve aucune longueur solution.

Exemple 8.2 :

Soit ABC tel que $AB = 5$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 45°$.

1. Déterminer BC à 10^{-2} près.

2. En déduire une valeur approchée de $\widehat{ABC}$ à 10^{-2} près.

II Calcul d'aires

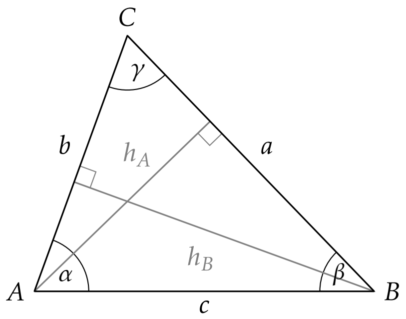
Théorème 8.3

Soit ABC un triangle. Notons $\mathcal{A}$ son aire.

$$\mathcal{A} = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

Démonstration

On considère h_A, h_B les hauteurs respectivement issues de A, B.



- $\mathcal{A} = \frac{a \cdot h_A}{2}$.
  $h_A = b\sin(\gamma)$, mais aussi $h_A = c \cdot \sin(\beta)$.
  Donc $\mathcal{A} = \frac{ab\sin(\gamma)}{2}$ et $\mathcal{A} = \frac{ac\sin(\beta)}{2}$.

- $\mathcal{A} = \frac{b \cdot h_B}{2}$.
  $h_B = c\sin(\alpha)$.
  Donc $\mathcal{A} = \frac{bc\sin(\alpha)}{2}$.

□

Méthode On peut ainsi calculer l'aire d'un triangle dès que l'on connaît la longueur de deux côtés et l'angle formé par ces deux côtés.

Exemple 8.3 :

Soit ABC tel que $BC = 5$, $AC = 4$ et $\widehat{ABC} = 38°$.
Calculer l'aire du triangle ABC. Arrondir à 10^{-2} près.