

# 7

## Équations du second degré

**Introduction** Le but de ce chapitre est d'apprendre à déterminer les solutions d'équations de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

appelées équations du second degré.

### Rappel

• Identités remarquables :

1.  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

2.  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

3.  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

•  $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$  ou  $b = 0$

•  $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$  ou  $x = -\sqrt{a}$ .

Ex :  $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4}$  ou  $x = -\sqrt{4} \Leftrightarrow x = 2$  ou  $x = -2$ .

## I Résolution par factorisation

### Méthode

- (a) On passe tous les termes de l'équation dans le membre de gauche pour se ramener à une équation de la forme  $f(x) = 0$ .  
 (b) On factorise le plus possible le membre de gauche si besoin à l'aide d'identités remarquables.  
 (c) On résout l'équation produit nulle ainsi obtenue.
- (a) On se ramène à une équation de la forme  $f(x)^2 = a$  à l'aide de factorisations.  
 (b) On en déduit  $f(x) = \sqrt{a}$  ou  $f(x) = -\sqrt{a}$ .

### Exemple 7.1 :

Résoudre les équations suivantes :

1.  $x^2 - 8x = 2x$ .

$$x^2 - 8x = 2x \Leftrightarrow x^2 - 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 10$$

$$S = \{0 ; 10\}$$

2.  $x^2 - 5 = 4$ .

$$x^2 - 5 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 3$$

$$S = \{-3 ; 3\}$$

3.  $x^2 + 4 = 4x$ .

$$x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times 2x + 2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$S = \{2\}$$

4.  $x^2 + 18x + 81 = 16$ .

$$x^2 + 18x + 81 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 2 \times 9x + 9^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x + 9)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x + 9 = \sqrt{16} \text{ ou } x + 9 = -\sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 - 9 \text{ ou } x = -4 - 9$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \text{ ou } x = -13$$

## II Résolution générale

### Propriété 7.1 – Formule de Viète

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Remarque(s) :**

- Le symbole  $\pm$  se lit « plus ou moins ». On peut l'utiliser pour indiquer que l'on considère deux quantités : celle sans signe moins devant, et celle avec.

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
 &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{avec } \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
 \end{aligned}$$

□

**Définition 7.1 – Discriminant**

La quantité  $b^2 - 4ac$  est appelée **discriminant** de  $ax^2 + bx + c$  et est notée  $\Delta$  (« **delta** »).

**Propriété 7.2**

Soit l'équation (E) :  $ax^2 + bx + c = 0$ .

1. Si  $\Delta > 0$ , alors (E) a **deux solutions** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si  $\Delta = 0$ , alors (E) a **une unique solution** :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

3. Si  $\Delta < 0$ , alors (E) **n'a pas de solution réelle**.

DÉMONSTRATION

$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$  n'a de sens que si  $\Delta \geq 0$ .  
L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  n'a donc aucune solution réelle dans le cas où  $\Delta < 0$ .  
Par ailleurs :

- Si  $\Delta > 0$ , on trouve bien deux solutions distinctes :  $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
- Si  $\Delta = 0$ , alors  $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a}$ .

□

**Exemple 7.2 :**

Résoudre les équations suivantes :

1.  $x^2 - 6x - 7 = 0$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 36 + 28 = 64.$$

$\Delta > 0$ , donc l'équation a deux solutions distinctes.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 &= \frac{-(-6) - \sqrt{64}}{2 \times 1} \\
 &= \frac{6 - 8}{2} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 &= \frac{-(-6) + \sqrt{64}}{2 \times 1} \\
 &= \frac{6 + 8}{2} \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

$$S = \{-1 ; 7\}$$

2.  $3x^2 + 6x + 3 = 0$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0.$$

$\Delta = 0$ , donc l'équation a une unique solution.

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{-b}{2a} \\
 &= -\frac{6}{2 \times 3} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

$$S = \{-1\}$$

3.  $x^2 - 4x + 5 = 0$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4.$$

$\Delta < 0$ , donc l'équation n'admet aucune solution réelle.

$$S = \emptyset$$