

A Résolution par factorisation

A.1 Questions de cours

1 Rappeler les trois identités remarquables.

1. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

2. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

A.2 Faire ses gammes

2 Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 = 4$ 2. $x^2 - 36 = 0$ 3. $(x + 1)^2 = 16$ 4. $x^2 = -9$
 5. $(x - 5)^2 = 81$ 6. $4x^2 - 25 = 0$ 7. $9x^2 - 100 = 0$ 8. $25x^2 - 121 = 0$

1.

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} \text{ ou } x = -\sqrt{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$

$$S = \{-2; 2\}$$

2.

$$x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{36} \text{ ou } x = -\sqrt{36}$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \text{ ou } x = -6$$

$$S = \{-6; 6\}$$

3.

$$(x + 1)^2 = 16 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{16} \text{ ou } x + 1 = -\sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 4 \text{ ou } x + 1 = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -5$$

$$S = \{-5; 3\}$$

4. $x^2 = -9$. Un carré est toujours positif, donc $x^2 = -9$ est impossible.

$$S = \emptyset$$

5.

$$(x - 5)^2 = 81 \Leftrightarrow x - 5 = \sqrt{81} \text{ ou } x - 5 = -\sqrt{81}$$

$$\Leftrightarrow x - 5 = 9 \text{ ou } x - 5 = -9$$

$$\Leftrightarrow x = 14 \text{ ou } x = -4$$

$$S = \{-4; 14\}$$

6.

$$4x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (2x)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 2x = \sqrt{25} \text{ ou } 2x = -\sqrt{25}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = -\frac{5}{2}$$

7.

$$9x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow (3x)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow 3x = \sqrt{100} \text{ ou } 3x = -\sqrt{100}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10}{3} \text{ ou } x = -\frac{10}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{10}{3}; \frac{10}{3} \right\}$$

8.

$$25x^2 - 121 = 0 \Leftrightarrow (5x)^2 - 11^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5x + 11)(5x - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x + 11 = 0 \text{ ou } 5x - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x = -11 \text{ ou } 5x = 11$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{11}{5} \text{ ou } x = \frac{11}{5}$$

$$S = \left\{ -\frac{11}{5}; \frac{11}{5} \right\}$$

3 Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 + 4x + 4 = 0$. 2. $x^2 - 6x + 9 = 0$ 3. $x^2 + 10x = -25$ 4. $x^2 + 81 = -18x$

5. $2x^2 - 16x = -32$
 7. $x^2 + x + 4 = -x + 3$

6. $3x^2 - 12x = -12$
 8. $2x^2 - 20x + 50 = 8x - 48$

1.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

$$S = \{-2\}$$

2.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

$$S = \{3\}$$

3.

$$\begin{aligned} x^2 + 10x = -25 &\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 5)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -5 \end{aligned}$$

$$S = \{-5\}$$

4.

$$\begin{aligned} x^2 + 81 = -18x &\Leftrightarrow x^2 + 18x + 81 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times 9 + 9^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 9)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -9 \end{aligned}$$

$$S = \{-9\}$$

5.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 16x = -32 &\Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 32 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x^2 - 8x + 16) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

$$S = \{4\}$$

6.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x = -12 &\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$$S = \{2\}$$

7.

$$\begin{aligned} x^2 + x + 4 = -x + 3 &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

$$S = \{-1\}$$

8.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 20x + 50 = 8x - 48 &\Leftrightarrow 2x^2 - 28x + 98 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x^2 - 14x + 49) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-7)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 7$$

$$S = \{7\}$$

4 Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 + 4x - 12 = 0$

2. $x^2 - 6x = 16$

3. $2x^2 = -16x + 66$

4. $3x^2 - 15 = 12x$

1.

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 2^2 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x+2 = \sqrt{16} \text{ ou } x+2 = -\sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow x = 4-2 \text{ ou } x = -4-2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -6$$

$$S = \{-6; 2\}$$

2.

$$x^2 - 6x = 16 \Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 - 3^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 3^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 16 + 3^2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x-3 = \sqrt{25} \text{ ou } x-3 = -\sqrt{25}$$

$$\Leftrightarrow x = 5+3 \text{ ou } x = -5+3$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \text{ ou } x = -2$$

$$S = \{-2; 8\}$$

3.

$$2x^2 = -16x + 66 \Leftrightarrow x^2 = -8x + 33$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x = 33$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \times 4x + 4^2 - 4^2 = 33$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \times 4x + 16 = 33 + 16$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow x+4 = \sqrt{49} \text{ ou } x+4 = -\sqrt{49}$$

$$\Leftrightarrow x = 7-4 \text{ ou } x = -7-4$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -11$$

$$S = \{-11; 3\}$$

4.

$$3x^2 - 15 = 12x \Leftrightarrow 3x^2 - 12x - 15 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2+3)(x-2-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ ou } x-5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 5$$

$$S = \{-1; 5\}$$

A.3 Exercices d'entraînement

5 Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - 9 = 0$ 2. $35x^2 + 7x = 0$ 3. $x^2 - 25 = 0$ 4. $x^2 + 25 = 0$

5. $121x^2 - 25 = 0$ 6. $36 - 6x^2 = 0$ 7. $\frac{1}{25} - \frac{x^2}{16} = 0$ 8. $12x^2 = 6x$

9. $x^2 - 8x + 16 = 0$ 10. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

11. $x^2 - 4x - 21 = 0$ 12. $x^2 - 14x + 13 = 0$

13. $2x^2 + 2x - 40 = 0$ 14. $6x^2 - 12x = -6$ 15. $12x^2 = 12x - 3$

16. $45x^2 - 30x = -5$ 17. $(x+3)^2 = -2x-7$

18. $(x+4)^2 = -2x-9$ 19. $12x+2 = -18x^2$

20. $4x^2 - 16x - 84 = 0$ 21. $2x^2 - 20x - 48 = 0$

22. $2x^2 + 18x = -40$

1.

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x+3)(x-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x+3=0 &\text{ ou } x-3=0 \\ \Leftrightarrow x=-3 &\text{ ou } x=3 \end{aligned}$$

$$S = \{-3; 3\}$$

2.

$$\begin{aligned} 35x^2 + 7x = 0 &\Leftrightarrow x(35x+7) = 0 \\ \Leftrightarrow x=0 &\text{ ou } 35x+7=0 \\ \Leftrightarrow x=0 &\text{ ou } x=-\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{5}; 0 \right\}$$

3.

$$\begin{aligned} x^2 - 25 = 0 &\Leftrightarrow x^2 = 25 \\ \Leftrightarrow x = \sqrt{25} &\text{ ou } x = -\sqrt{25} \\ \Leftrightarrow x = 5 &\text{ ou } x = -5 \end{aligned}$$

$$S = \{-5; 5\}$$

4.

$$x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -25$$

Or un carré est toujours positif, donc il n'existe pas de réel x tel que $x^2 = -25$.

$$S = \emptyset$$

5.

$$\begin{aligned} 121x^2 - 25 = 0 &\Leftrightarrow (11x)^2 - 5^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (11x-5)(11x+5) &= 0 \\ \Leftrightarrow 11x-5=0 &\text{ ou } 11x+5=0 \\ \Leftrightarrow 11x=5 &\text{ ou } 11x=-5 \\ \Leftrightarrow x = \frac{5}{11} &\text{ ou } x = -\frac{5}{11} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ -\frac{5}{11}; \frac{5}{11} \right\}$$

6.

$$\begin{aligned} 36 - 6x^2 = 0 &\Leftrightarrow 6(6 - x^2) = 0 \\ \Leftrightarrow 6 - x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^2 &= -6 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 6 \\ \Leftrightarrow x = \sqrt{6} &\text{ ou } x = -\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$S = \{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$$

7.

$$\begin{aligned} \frac{1}{25} - \frac{x^2}{16} = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{x}{4}\right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5} + \frac{x}{4}\right)\left(\frac{1}{5} - \frac{x}{4}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5} + \frac{x}{4} = 0 &\text{ ou } \frac{1}{5} - \frac{x}{4} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{4} = -\frac{1}{5} &\text{ ou } -\frac{x}{4} = -\frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} &\text{ ou } \frac{x}{4} = \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} &\text{ ou } x = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ -\frac{4}{5}; \frac{4}{5} \right\}$$

8.

$$\begin{aligned} 12x^2 = 6x &\Leftrightarrow 12x^2 - 6x = 0 \\ \Leftrightarrow x(12x - 6) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 &\text{ ou } 12x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 &\text{ ou } 12x = 6 \\ \Leftrightarrow x = 0 &\text{ ou } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ 0; \frac{1}{2} \right\}$$

9.

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 16 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = 0 \\&\Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \\&\Leftrightarrow x - 4 = 0 \\&\Leftrightarrow x = 4\end{aligned}$$

$$S = \{4\}$$

10.

$$\begin{aligned}4x^2 + 12x + 9 = 0 &\Leftrightarrow 4\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) = 0 \\&\Leftrightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0 \\&\Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\&\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\&\Leftrightarrow x + \frac{3}{2} = 0 \\&\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$S = -\frac{3}{2}$$

11.

$$\begin{aligned}x^2 - 4x - 21 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2 - 21 = 0 \\&\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 2^2 - 21 = 0 \\&\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 25 \\&\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{25} \text{ ou } x - 2 = -\sqrt{25} \\&\Leftrightarrow x = 5 + 2 \text{ ou } x = -5 + 2 \\&\Leftrightarrow x = 7 \text{ ou } x = -3\end{aligned}$$

$$S = \{-3; 7\}$$

12.

$$x^2 - 14x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 - 7^2 + 13 = 0$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (x - 7)^2 - 7^2 + 13 = 0 \\&\Leftrightarrow (x - 7)^2 - 49 + 13 = 0 \\&\Leftrightarrow (x - 7)^2 = 36 \\&\Leftrightarrow x - 7 = \sqrt{36} \text{ ou } x - 7 = -\sqrt{36} \\&\Leftrightarrow x = 6 + 7 \text{ ou } x = -6 + 7 \\&\Leftrightarrow x = 13 \text{ ou } x = 1\end{aligned}$$

$$S = \{1; 13\}$$

13.

$$\begin{aligned}2x^2 + 2x - 40 = 0 &\Leftrightarrow 2(x^2 + x - 20) = 0 \\&\Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0 \\&\Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 20 = 0 \\&\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} = 0 \\&\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} \\&\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{81}{4}} \text{ ou } x + \frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{81}{4}} \\&\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{4}} \text{ ou } x + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{4}} \\&\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2} - \frac{9}{2} \\&\Leftrightarrow x = \frac{8}{2} \text{ ou } x = -\frac{10}{2} \\&\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = -5\end{aligned}$$

$$S = \{-5; 4\}$$

14.

$$\begin{aligned}6x^2 - 12x = -6 &\Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 6 = 0 \\&\Leftrightarrow 6(x^2 - 2x + 1) = 0 \\&\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\&\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$S = \{1\}$$

15.

$$\begin{aligned} 12x^2 = 12x - 3 &\Leftrightarrow 12x^2 - 12x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(4x^2 - 4x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

B Résolution générale

B.1 Questions de cours

6 Soit (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

- Combien (E) peut-elle avoir de solutions?
- Qu'est-ce qui permet de savoir si une telle équation admet une ou plusieurs solutions?
- Exprimer ces solutions éventuelles en fonction de a , b et c .

- 0, 1 ou 2.
- Le discriminant, qu'on note Δ , égal à $b^2 - 4ac$.
Si $\Delta < 0$, (E) n'a pas de solution.
Si $\Delta = 0$, (E) a une solution.
Si $\Delta > 0$, (E) a deux solutions.
- Si (E) a deux solutions, elles sont de la forme :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si (E) n'a qu'une solution, il s'agit du réel $-\frac{b}{2a}$.

B.2 Faire ses gammes

7 Résoudre les équations suivantes en utilisant la formule de Viète :

- $4x^2 - 9 = 0$
- $x^2 + 49 = 0$
- $x^2 + x + 1 = 0$
- $x^2 + x = 20$
- $5x^2 - 4x - 1 = 0$
- $3x^2 + 21x + 36 = 0$
- $32x^2 - 32x + 8 = 0$
- $17x^2 + 34x = -51$
- $x^2 + x - 1 = 0$
- $45x^2 - 30x = -5$
- $3x^2 - 6(x+1) = -7$
- $(x-2)^2 + 4x - 4 = 7$

1. $a = 4$; $b = 0$; $c = -9$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 4 \times (-9) = 144.$$

$\Delta > 0$, donc $4x^2 - 9 = 0$ admet deux solutions réelles.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-0 - \sqrt{144}}{2 \times 4} \\ &= \frac{-12}{8} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-0 + \sqrt{144}}{2 \times 4} \\ &= \frac{12}{8} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\}$$

2. $a = 1$; $b = 0$; $c = 49$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 1 \times 49 = -196.$$

$\Delta < 0$, donc l'équation n'a pas de solution réelle.

$$S = \emptyset$$

3. $a = 1$; $b = 1$; $c = 1$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3.$$

$\Delta < 0$, donc l'équation n'a pas de solution réelle.

$$S = \emptyset$$

4. $x^2 + x = 20 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0$. $a = 1$; $b = 1$; $c = -20$.
 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-20) = 81$.
 $\Delta > 0$, donc l'équation $x^2 + x - 20 = 0$ admet deux solutions réelles.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{81}}{2 \times 1} = -5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{81}}{2 \times 1} = 4$$

$$S = \{-5; 4\}$$

5. $a = 5$, $b = -4$ et $c = -1$.
 $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 \times (-1) = 36$.
 $\Delta > 0$, donc $5x^2 - 4x - 1 = 0$ a deux solutions réelles.

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{36}}{2 \times 5} = \frac{4 - 6}{10} = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{36}}{2 \times 5} = 1$$

$$S = \left\{-\frac{1}{5}; 1\right\}$$

6. $a = 3$; $b = 21$; $c = 36$.
 $\Delta = 21^2 - 4 \times 3 \times 36 = 9$.
 $\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions réelles.

$$x_1 = \frac{-21 - \sqrt{9}}{2 \times 3} = \frac{-21 - 3}{6} = -4$$

$$x_2 = \frac{-21 + \sqrt{9}}{2 \times 3} = -3$$

$$S = \{-4; -3\}$$

7. $a = 32$; $b = -32$; $c = 8$.
 $\Delta = (-32)^2 - 4 \times 32 \times 8 = 0$.

$\Delta = 0$ donc l'équation a une unique solution.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-32}{2 \times 32} = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

8. $17x^2 + 34x = -51 \Leftrightarrow 17x^2 + 34x + 51 = 0$.
 $\Delta = 34^2 - 4 \times 17 \times 51 = -2312$.
 $\Delta < 0$, donc l'équation n'a pas de solution réelle.

$$S = \emptyset$$

9. $a = 1$; $b = 1$; $c = -1$.
 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$.
 $\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions réelles.

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$S = \left\{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$$

10. $45x^2 - 30x = -5 \Leftrightarrow 45x^2 - 30x + 5 = 0$.
 $a = 45$; $b = -30$; $c = 5$.
 $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 45 \times 5 = 0$.
 $\Delta = 0$, donc l'équation a une unique solution.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-30}{2 \times 45} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$11. 3x^2 - 6(x+1) = -7 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 = 0.$$

$$a = 3; b = -6; c = 1.$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 24.$$

$\Delta > 0$, donc l'équation a deux solutions.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-6) - \sqrt{24}}{2 \times 3} \\ &= \frac{6 - \sqrt{4 \times 6}}{6} \\ &= \frac{6 - 2\sqrt{6}}{6} \\ &= \frac{3 - \sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-(-6) + \sqrt{24}}{2 \times 3} \\ &= \frac{3 + \sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{6}}{3}; \frac{3 + \sqrt{6}}{3} \right\}$$

$$12. (x-2)^2 + 4x - 4 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 + 4x - 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7 = 0.$$

$$x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{7} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{7}$$

$$S = \left\{ -\sqrt{7}; \sqrt{7} \right\}$$

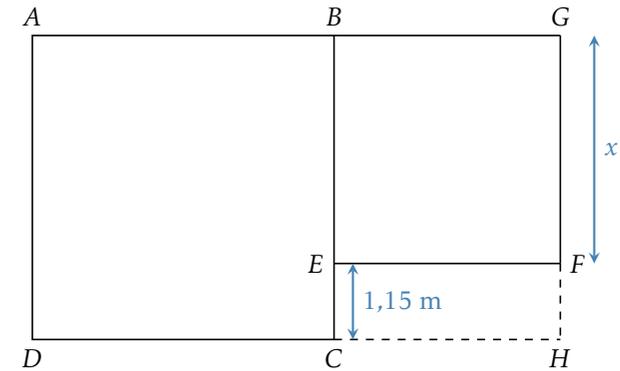
B.3 Exercices d'entraînement

8 Un architecte travaille sur le plan d'une maison.

Le plan de l'étage est schématisé par la figure ci-dessous.

$ABCD$ et $BGFE$ sont deux carrés. Le rectangle $EFHC$, d'une largeur de 1,15 m, représente un balcon.

On appelle x la longueur du côté du plus petit des deux carrés.



Déterminer la valeur de x telle que l'étage ait une surface de plancher de 80 m^2 (le balcon n'est pas pris en compte).

L'aire de l'étage est égale à $(x + 1,15)^2 + x^2$.

$$(x + 1,15)^2 + x^2 = x^2 + 2 \times x \times 1,15 + 1,15^2 + x^2 = 2x^2 + 2,3x + 1,3225.$$

On cherche à résoudre $2x^2 + 2,3x + 1,3225 = 80$, soit $2x^2 + 2,3x - 78,6775 = 0$.

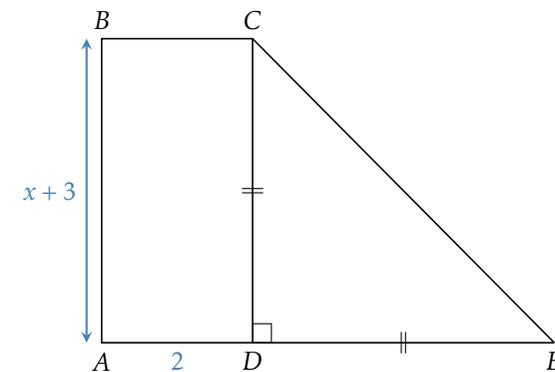
$$\Delta = 634,71.$$

On en déduit $x_1 \approx -6,873$ et $x_2 \approx 5,723$.

Une longueur négative n'ayant pas de sens, la valeur recherchée est $5,723$.

9 On considère la figure ci-contre composée du rectangle $ABCD$ et du triangle CDE rectangle et isocèle en D .

Déterminer la ou les valeurs de x telle(s) que l'aire du rectangle $ABCD$ soit égale à quatre fois l'aire du triangle CDE .



L'aire du rectangle est égale à $2x + 6$.

L'aire du triangle est égale à $\frac{(x+3)^2}{2}$.

$$2x + 6 = 4 \times \frac{(x+3)^2}{2} \Leftrightarrow -2x^2 - 10x - 12 = 0$$

On résout l'équation et on trouve $\Delta = 4$ puis les solutions -3 et -2 .

La seule solution ayant du sens dans le contexte donné est -2 .

10 Dans le plan, on considère un anneau d'aire \mathcal{A} formé par un grand cercle de rayon R à l'intérieur duquel se situe un plus petit cercle de rayon r .

1. Exprimer l'aire de l'anneau en fonction de R et r .
2. Déterminer R sachant que $\mathcal{A} = 120 \text{ cm}^2$ et $r = 4 \text{ cm}$.

1. $\mathcal{A} = \pi R^2 - \pi r^2$.
- 2.

$$\begin{aligned} 120 &= \pi R^2 - \pi \times 4^2 \Leftrightarrow \pi R^2 = 120 + 16\pi \\ &\Leftrightarrow R^2 = \frac{120 + 16\pi}{\pi} \end{aligned}$$

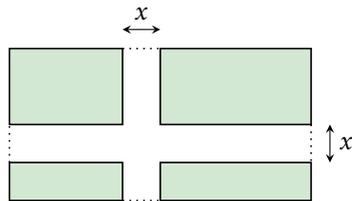
Comme $R > 0$, on en déduit : $R = \sqrt{\frac{120 + 16\pi}{\pi}} \approx 7,36$.

Le grand cercle doit donc avoir un rayon environ égal à $7,36 \text{ cm}$.

11 Un jardin de forme rectangulaire a pour dimension 20 m de longueur et 15 m de largeur.

Deux allées d'une largeur de x mètres partagent transversalement le jardin.

Du gazon est planté sur le reste du jardin.



Déterminer la ou les valeurs possibles de x telle(s) que l'aire des allées et du gazon soient égales.

Notons \mathcal{A}_G l'aire du gazon et \mathcal{A}_A l'aire des allées.

$$\mathcal{A}_A = 20 \times x + 15 \times x - x^2 = -x^2 + 35x.$$

On en déduit que $\mathcal{A}_G = 20 \times 15 - \mathcal{A}_A = x^2 - 35x + 300$.

On cherche x tel que $\mathcal{A}_A = \mathcal{A}_G$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_A = \mathcal{A}_G &\Leftrightarrow -x^2 + 35x = x^2 - 35x + 300 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 70x + 300 = 0 \end{aligned}$$

$a = 2$; $b = -70$; $c = 300$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-70)^2 - 4 \times 2 \times 300 = 4900 - 2400 = 2500.$$

$\Delta > 0$, donc l'équation $2x^2 - 70x + 300 = 0$ admet deux solutions réelles.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-70) - \sqrt{2500}}{2 \times 2} \\ &= \frac{70 - 50}{4} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-(-70) + \sqrt{2500}}{2 \times 2} \\ &= \frac{70 + 50}{4} \\ &= 30 \end{aligned}$$

$x = 30$ n'est pas possible dans le contexte donné.

On donc $\mathcal{A}_A = \mathcal{A}_G$ pour $x = 5$.

12 Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2 - 2x$.

1. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;I,J)$, en choisissant 4 gros carreaux pour une unité.
2. Soit C le point de coordonnées $(0;2)$. Soient A le point de coordonnées $(a;0)$, avec a compris entre 0 et 1, et B le point de coordonnées $(a;f(a))$. Déterminer la valeur de a telle que $[AB]$ partage le triangle OIC en deux parties de même aire. On déterminera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.