7 Équations du second degré

Introduction Le but de ce chapitre est d'apprendre à déterminer les solutions d'équations de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

appelées équations du second degré.

Rappel

- Identités remarquables :
  1. $a^2 + 2ab + b^2 =$ ....
  2. $a^2 - 2ab + b^2 =$ ....
  3. $a^2 - b^2 =$ ....
- $ab = 0 \Leftrightarrow$ ....
- $x^2 = a \Leftrightarrow$ ....
  Ex : $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4}$ ou $x = -\sqrt{4} \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

I Résolution par factorisation

Méthode

1. (a) On passe tous les termes de l'équation dans le membre de gauche pour se ramener à une équation de la forme $f(x) = 0$.
   (b) On factorise le plus possible le membre de gauche si besoin à l'aide d'identités remarquables.
   (c) On résout l'équation produit nulle ainsi obtenue.
2. (a) On se ramène à une équation de la forme $f(x)^2 = a$ à l'aide de factorisations.
   (b) On en déduit $f(x) = \sqrt{a}$ ou $f(x) = -\sqrt{a}$.

Exemple 7.1 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - 8x = 2x$.
2. $x^2 - 5 = 4$.
3. $x^2 + 4 = 4x$.
4. $x^2 + 18x + 81 = 16$.

II Résolution générale

Propriété 7.1 – Formule de Viète

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \text{.................}$$

Remarque(s) :

- Le symbole $\pm$ se lit « plus ou moins ». On peut l'utiliser pour indiquer que l'on considère deux quantités : celle sans signe moins devant, et celle avec.

Démonstration

□

Définition 7.1 – Discriminant

La quantité $b^2 - 4ac$ est appelée ______________ de $ax^2 + bx + c$ et est notée ... (« ______ »).

Propriété 7.2

Soit l'équation $(E) : ax^2 + bx + c = 0$.

1. Si $\Delta > 0$, alors (E) __________________ :

$$x_1 = \ldots\ldots \qquad x_2 = \ldots\ldots$$

2. Si $\Delta = 0$, alors (E) ________________________ :

$$x_0 = \ldots.$$

3. Si $\Delta < 0$, alors (E) ___________________________ .

Démonstration

$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ n'a de sens que si $\Delta \geq 0$.
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a donc aucune solution réelle dans le cas où $\Delta < 0$.
Par ailleurs :

- Si $\Delta > 0$, on trouve bien deux solutions distinctes : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a}$.

□

Exemple 7.2 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - 6x - 7 = 0$.
2. $3x^2 + 6x + 3 = 0$.
3. $x^2 - 4x + 5 = 0$.