6 Fonctions de référence

Rappel

- On appelle **ensemble** (ou **domaine**) **de définition** de f l'ensemble de toutes les valeurs x telles que $f(x)$ existe.
  On note cet ensemble $\mathcal{D}_f$.
- $f(a)$ est appelée **image** de a par f.
- Tout réel x tel que $f(x) = y$ est appelé **antécédent** (ou **préimage**) de y par f.
- La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points M de coordonnées $\left(x; \boldsymbol{f(x)}\right)$.

I Fonctions affines

I.1 Définition et propriétés

Définition 6.1 – Fonction affine

Une fonction f est dite **affine** s'il existe deux réels m et p tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \boldsymbol{mx + p}$$

Remarque(s) :

- Une fonction affine est donc une fonction polynomiale de degré **0** (si $m = \mathbf{0}$) ou **1** (si $m \neq \mathbf{0}$).

Propriété 6.1 – Cas particuliers

Soient m et p deux réels, et $f : x \mapsto mx + p$.

- Si $m = 0$, alors f est **constante**.
- Si $p = 0$, alors f est **linéaire**.

Exemple 6.1 :

Les fonctions suivantes sont-elles affines ? Si oui, préciser les valeurs de m et p.

1. $f : x \mapsto -x + 5$. Oui, $m = -1$ et $p = 5$.
2. $g : x \mapsto x^2 - 1$. Non.
3. $h : x \mapsto 6x$. Oui, h est linéaire. On a $m = 6$ et $p = 0$.
4. $k : x \mapsto -2$. Oui. k est constante, on a $m = 0$ et $p = -1$

Propriété 6.2

f est une fonction affine si et seulement si $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est **constant**, **pour tous** réels a et b distincts.
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est appelé **taux d'accroissement de f entre a et b**.

Remarque(s) :

- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ revient à diviser la variation en ordonnée par la variation en abscisse.
  On obtient comme résultat la variation en ordonnée pour une variation d'une unité en abscisse.

Méthode On peut montrer qu'une fonction n'est pas affine en calculant deux taux d'accroissements n'ayant pas la même valeur.

Exemple 6.2 :

Dans les deux cas, dire si une fonction f vérifiant ces données pourrait être une fonction affine.

1. $f(1) = 2$, $f(5) = 4$ et $f(6) = \frac{9}{2}$.
   $\frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{4-2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
   $\frac{f(6)-f(5)}{6-5} = \frac{\frac{9}{2}-4}{6-5} = \frac{\frac{9}{2}-\frac{8}{2}}{1} = \frac{1}{2}$.
   Les deux taux d'accroissements calculés sont égaux. ⚠ Cela ne nous assure pas pour autant que f soit affine.
2. $f(3) = 7$, $f(-2) = 2$ et $f(-1) = 4$.
   $\frac{f(-2)-f(3)}{-2-3} = \frac{2-7}{-2-3} = -\frac{5}{-5} = 1$.
   $\frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = \frac{4-2}{-1+2} = \frac{2}{1} = 2$.
   On a trouvé deux taux d'accroissements non égaux. On peut donc en déduire qu'une fonction vérifiant ces informations n'est pas affine.

Corollaire 6.3

Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine et soient a et b deux réels distincts.
On a :

$$m = \frac{\boldsymbol{f(b) - f(a)}}{\boldsymbol{b - a}} \qquad p = \boldsymbol{f(a) - ma}$$

Méthode Il suffit donc de connaître l'image de deux valeurs distinctes pour déterminer l'expression d'une fonction affine.

Exemple 6.3 :

Soit f une fonction affine telle que $f(1) = 8$ et $f(-3) = 5$.
Déterminer l'expression de f.

On calcule m :
$m = \frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)} = \frac{8-5}{1+3} = \frac{3}{4}$.
On sait donc que $f(x) = \frac{3}{4}x + p$.
Déterminons p. On sait que $f(1) = 8$.
Or :

$$\begin{aligned} f(1) = 8 &\Leftrightarrow \frac{3}{4}\cdot 1 + p = 8 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4} + p = 8 \\ &\Leftrightarrow p = \frac{32}{4} - \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow p = \frac{29}{4} \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{29}{4}$.

I.2 Représentation graphique

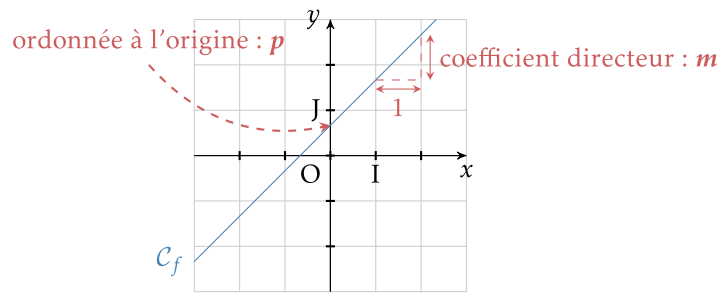
Propriété 6.4

Soit $f : x \mapsto mx + p$, avec m et p deux réels.
$\mathcal{C}_f$ est une droite dont m est le **coefficient directeur** et p est l'**ordonnée à l'origine**.

Remarque(s) :

- le coefficient directeur correspond concrètement à la variation en y lorsqu'on augmente x d'une unité.
- l'ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées. En effet $p = f(0)$, il s'agit donc bien de la valeur en ordonnée lorsque x vaut 0 (d'où le nom d'ordonnée « à l'origine »).

Illustration



Méthode Si on connaît l'expression d'une fonction affine, on peut ainsi tracer sa courbe de deux manières différentes.

1. On calcule l'image de deux valeurs. On place les deux points de $\mathcal{C}_f$ associés, puis on trace la droite passant par ces deux points.
2. On place le point de coordonnées $(0;p)$, puis on applique le coefficient directeur pour se donner un second point. $\mathcal{C}_f$ est la droite passant par ces deux points.

Remarque(s) :

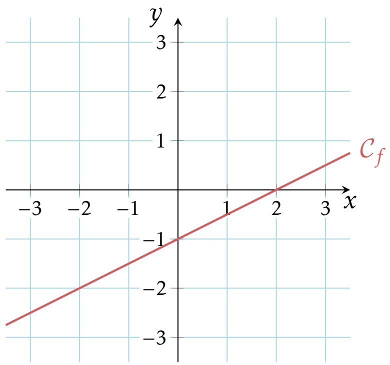
- Dans la propriété 6.1 nous avons vu que si $p = 0$, alors f est linéaire. On retrouve graphiquement que si $p = 0$, alors l'ordonnée à l'origine vaut zéro et donc la droite passe par l'origine du repère.
- Si $m = 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est une droite horizontale car le coefficient directeur vaut alors zéro, il n'y a pas de variation en ordonnée lorsqu'on augmente x d'une unité.

Exemple 6.4 :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$.
Tracer la courbe représentative de f dans le repère ci-dessous.

On peut, au choix :

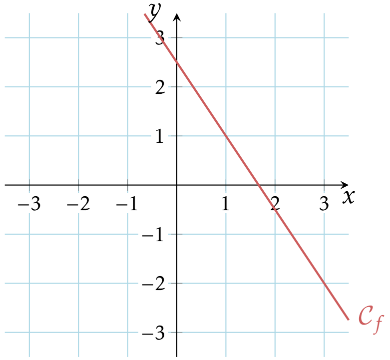
1. Placer le point de coordonnées $(0;-1)$ puisque l'on sait que l'ordonnée à l'origine de f est -1, puis « appliquer » un coefficient directeur de $\frac{1}{2}$.
2. Calculer deux images afin de placer deux points de $\mathcal{C}_f$. Deux points suffisant à déterminer une droite, on relie alors ces deux points en prolongeant.



Par exemple : $f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2) - 1 = -2$ et $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0$.
On place donc les points de coordonnées $(-2;-2)$ et $(2;0)$.

Exemple 6.5 :

En justifiant, déterminer graphiquement l'expression de la fonction affine f représentée ci-dessous.



Les points de coordonnées $(1;1)$ et $3;-2$ appartiennent à $\mathscr{C}_f$.
On a donc $f(1) = 1$ et $f(3) = -2$.
Ainsi : $m = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-2-1}{3-1} = -\frac{3}{2}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} p &= f(3) - m \cdot 3 \\ &= -2 - \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 3 \\ &= -\frac{4}{2} + \frac{9}{2} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

II Fonction racine carrée

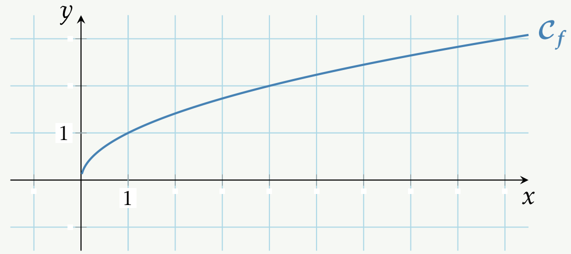
Rappel La racine carrée d'un nombre x, notée $\sqrt{x}$, est le nombre **positif** qui élevé au carré vaut x.
Autrement dit : $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$.
Par exemple : $\sqrt{9} = 3$ car $3 \cdot 3 = 9$.
On peut écrire :

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2 \quad \text{avec} \quad a,b \in \mathbb{R}^+$$

Définition 6.2 – Fonction racine carrée

La fonction racine carrée est la fonction :

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}.$$



Propriété 6.5 – Règles de calcul

- Pour tous réels positifs a et b : $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- Pour tous réels positifs a et b avec $b \neq 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple 6.6 :

1. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Calculer $f(0)$, $f(4)$, $f(9)$, $f(-4)$.
   $f(0) = \sqrt{0} = 0$.
   $f(4) = \sqrt{4} = 2$.
   $f(9) = \sqrt{9} = 3$.
   $f(-4) = \sqrt{-4}$ ⚠ IMPOSSIBLE. La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.
2. Soit $g : x \mapsto \sqrt{x-3}$. Quel est le domaine de définition de g ?
   $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.
   $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.
   Donc g est définie sur $[3;+\infty[$.
3. Simplifier $\sqrt{\frac{75}{4}}$.
   $\sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{25 \cdot 3}}{2} = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

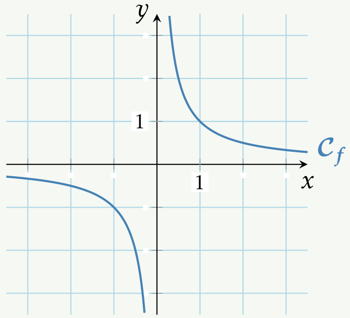
III Fonctions inverse

Définition 6.3

La fonction inverse est la fonction :

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Sa courbe représentative est une **hyperbole**.



Remarque(s) :

- Lorsque x se rapproche de 0 par la gauche, $f(x)$ se rapproche de $-\infty$ et lorsque x se rapproche de 0 par la droite, $f(x)$ se rapproche de $+\infty$.
  On dit que la fonction inverse possède une **asymptote verticale** en $x = 0$.
- Lorsque x se rapproche de $-\infty$ ou de $+\infty$, $f(x)$ se rapproche de **0**.
  On dit que la fonction inverse possède une **asymptote horizontale** en $y = 0$.

Méthode De manière générale pour une fonction de la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, on peut :

1. Déterminer le domaine de définition en résolvant $cx + d = 0$.
2. Déterminer le zéro de f en résolvant $ax + b = 0$.
3. Déterminer l'asymptote verticale et l'asymptote horizontale de f : asymptote verticale en la valeur interdite, et asymptote verticale à déterminer en observant les valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de $\pm\infty$.

Exemple 6.7 :

Soit $f : x \mapsto \frac{2x+1}{5x+10}$.

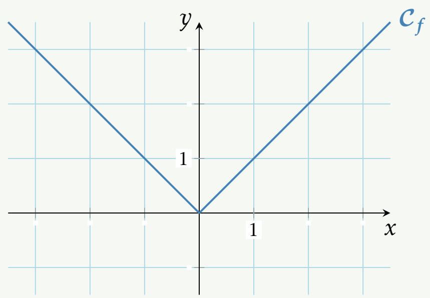
1. Déterminer le domaine de définition de f.
   $5x + 10 = 0 \Leftrightarrow 5x = -10 \Leftrightarrow x = -2$.
   Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2. Déterminer le zéro de f.
   $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.
   Donc le zéro de f est $-\frac{1}{2}$.
   NB : On peut vérifier. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+10} = \frac{-1+1}{-\frac{5}{2}+10} = \frac{0}{\frac{15}{2}} = 0$.
3. f admet-elle des asymptotes ? Si oui lesquelles ?
   f admet une asymptote verticale en $x = -2$ (valeur interdite).
   On calcule des images de valeurs très grandes (en se rapprochant de $+\infty$), et on voit que $f(x)$ semble se rapprocher de $\frac{2}{5}$.
   On observe la même chose pour des images de valeurs très petites (en se rapprochant de $-\infty$).
   f admet une asymptote horizontale en $y = \frac{2}{5}$.

IV Fonction valeur absolue

Définition 6.4 – Valeur absolue

La fonction valeur absolue est la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$



Remarque(s) :

- Puisque $|x| = -x$ si $x < 0$, une valeur absolue est toujours positive.
- On peut interpréter $|x|$ comme la distance entre x et 0.
- On peut interpréter $|a - b|$ comme la distance entre les deux réels a et b.

Exemple 6.8 :

1. Déterminer $|-5|$ et $|3|$.
   $|-5| = 5$ et $|3| = 3$.
2. Que représente géométriquement $|1-7|$? $|2-(-1)|$?
   $|1-7|$ est la distance entre 1 et 7. $|1-7| = |-6| = 6$.
   $|2-(-1)|$ est la distance entre 2 et -1. $|2-(-1)| = |3| = 3$.