A Fonctions affines

A.1 Questions de cours

1 Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine et a et b deux réels.

1. Rappeler la formule permettant de calculer m.
2. Exprimer $f(a)$ en fonction de a et en déduire la formule du cours permettant de calculer p.

> 1. $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
> 2. $f(a) = m \cdot a + p$.
> 3. $f(a) = m \cdot a + p \Leftrightarrow p = f(a) - ma$

A.2 Faire ses gammes

2

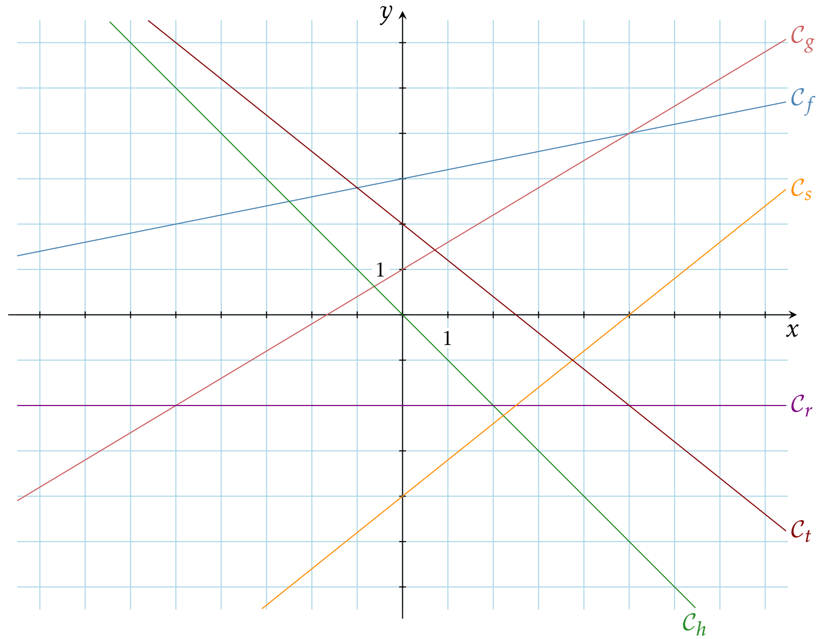
1. Compléter le tableau suivant :

Expression algébrique $f(x) =$	$\mathcal{D}_f$	Zéro	Ordonnée à l'origine	Pente de la droite
$-\frac{1}{4}x + 4$	$\mathbb{R}$	16	4	$-\frac{1}{4}$
$\frac{2}{5}x + 2$	$\mathbb{R}$	-5	2	$\frac{2}{5}$
$x - 1$	$\mathbb{R}$	1	-1	1
6	$\mathbb{R}$	Aucun	6	0
$-\frac{2}{7}x - 3$	$\mathbb{R}$	$-\frac{21}{2}$	-3	$-\frac{2}{7}$
$-\frac{2}{5}x$	$\mathbb{R}$	0	0	$-\frac{2}{5}$

> L'ensemble de définition d'une fonction affine est $\mathbb{R}$ (pas de valeur interdite).
> Un zéro d'une fonction est une valeur en laquelle elle s'annule.

2. Représenter les fonctions du tabeau ci-dessus sur $[-10;10]$ dans un repère orthonormé.

3 Déterminer graphiquement le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des droites suivantes puis déterminer l'expression algébrique de la fonction représentée.



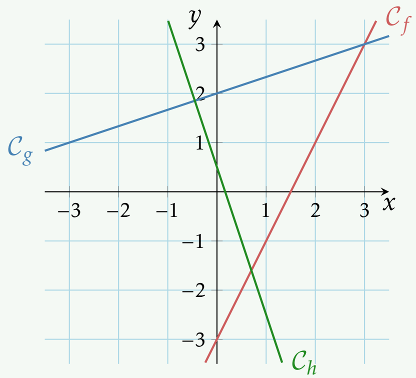
> 1. $\mathcal{C}_f$:
>   - Coef. directeur : $\frac{1}{5}$
>   - Ordonnée à l'origine : 3.
>   - $f(x) = \frac{x}{5} + 3$
> 2. $\mathcal{C}_g$:
>   - Coef. directeur : $\frac{3}{5}$
>   - Ordonnée à l'origine : 1.
>   - $g(x) = \frac{3x}{5} + 1$
> 3. $\mathcal{C}_h$:
>   - Coef. directeur : -1
>   - Ordonnée à l'origine : 0.
>   - $h(x) = -x$
> 4. $\mathcal{C}_r$:
>   - Coef. directeur : 0
>   - Ordonnée à l'origine : -2.
>   - $r(x) = -2$
> 5. $\mathcal{C}_s$:
>   - Coef. directeur : $\frac{4}{5}$
>   - Ordonnée à l'origine : -4.
>   - $s(x) = \frac{4x}{5} - 4$
> 6. $\mathcal{C}_t$:
>   - Coef. directeur : $-\frac{4}{5}$
>   - Ordonnée à l'origine : 2.
>   - $t(x) = -\frac{4x}{5} + 2$

A.3 Exercices d'entraînement

4 Soient $f : x \mapsto 2x-3$, $g : x \mapsto \frac{1}{3}x+2$ et $h : x \mapsto -3x+\frac{1}{2}$.

1. Représenter graphiquement f, g et h dans un repère orthonormé.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection des droites ainsi tracées.
3. On note A le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, B le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ et C le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$.
ABC est-il rectange ? *Justifier*.

1.



2. (a) Cherchons les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
On cherche d'abord son abscisse.
On cherche pour cela x tel que $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow 2x-3 = \frac{1}{3}x+2 \\ &\Leftrightarrow 2x - \frac{1}{3}x = 2+3 \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{3}x = 5 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Le point d'intersection recherché appartient à la fois à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, donc son ordonnée est égale à $f(3)$, mais aussi à $g(3)$.
On peut donc par exemple choisir de calculer $f(3)$.
$f(3) = 2\cdot 3-3 = 3$.
On en déduit que le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ a pour coordonnées $\boxed{(3;3)}$.

(b) Pour le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$:

$$\begin{aligned} f(x) = h(x) &\Leftrightarrow 2x-3 = -3x+\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2x+3x = \frac{1}{2}+3 \\ &\Leftrightarrow 5x = \frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

$f\left(\frac{7}{10}\right) = 2\cdot\frac{7}{10} - 3 = \frac{14}{10} - 3 = -\frac{48}{30} = -\frac{8}{5}$.
Donc le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$ a pour coordonnées $\boxed{\left(\frac{7}{10};-\frac{8}{5}\right)}$.

(c) Pour le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$:

$$\begin{aligned} g(x) = h(x) &\Leftrightarrow \frac{1}{3}x+2 = -3x+\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}x+3x = \frac{1}{2}-2 \\ &\Leftrightarrow \frac{10}{3}x = -\frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{9}{20} \end{aligned}$$

$g\left(-\frac{9}{20}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{9}{20}\right)+2 = -\frac{9}{60}+\frac{120}{60} = \frac{111}{60} = \frac{37}{20}$.
Donc le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ a pour coordonnées $\boxed{\left(-\frac{9}{20};\frac{37}{20}\right)}$.

3. Dans un repère orthonormé, on a : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.
On peut calculer AB, AC et BC, puis voir si le carré du plus grand côté est égal à la somme du carré des deux autres côtés.
On a : $A(3;3)$, $B\left(-\frac{9}{20};\frac{37}{20}\right)$ et $C\left(\frac{7}{10};-\frac{8}{5}\right)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{7}{10}-3\right)^2+\left(-\frac{8}{5}-3\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{23}{30}\right)^2+\left(-\frac{23}{5}\right)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{23\sqrt{10}}{20}$$

On trouve de même $BC = \frac{23\sqrt{10}}{20}$ et $AC = \frac{23\sqrt{5}}{10}$.
Le plus grand côté est $[AC]$.
$AC^2 = \left(\frac{23\sqrt{5}}{10}\right)^2 = \frac{23^2 \cdot 5}{100} = \frac{23^2}{20}$.
$AB^2 + BC^2 = \frac{23^2 \cdot 10}{20^2} + \frac{23^2 \cdot 10}{20^2} = 2 \cdot \frac{23^2 \cdot 10}{20^2} = \frac{23^2 \cdot 20}{20^2} = \frac{23^2}{20}$.
Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
Ainsi d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.

5 Calculer l'aire du triangle délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite représentant la fonction $f : x \mapsto -4x + 500$.

Notons A le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées et B le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
On cherche à déterminer l'aire du triangle AOB.
AOB est rectangle en O, donc on peut considérer OB comme base, et AO comme hauteur.
Nous allons donc chercher AO et BO afine de calculer $\frac{AO \cdot BO}{2}$ $\left(\frac{\text{base} \cdot \text{hauteur}}{2}\right)$.
A a pour abscisse 0 et pour ordonnée l'ordonnée à l'origine de f, soit 500.
Ainsi : $A(0;500)$.
B a pour ordonnée 0. Son abscisse est le zéro de f.
On résout donc l'équation $f(x_B) = 0$ et on trouve $x_B = 125$.
On calcule $AO = 500$ et $BO = 125$.
On a ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{AOB} &= \frac{AO \cdot BO}{2} \\ &= \frac{500 \cdot 125}{2} \\ &= \boxed{31\,250} \end{aligned}$$

6 Calculer l'aire du triangle délimité par l'axe des abscisses et les droites représentant les fonctions $f : x \mapsto x + 1000$ et $g : x \mapsto -4x + 500$.

On cherche à calculer l'aire de ABC où :

- A est le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
- B est le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- C est le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.

x_A est le zéro de f. On résout $f(x_A) = 0$ et on trouve $x_A = -1000$. D'où $A(-1000;0)$.
x_B est solution de $f(x_B) = g(x_B)$. On trouve $x_B = -100$.
De plus, $f(-100) = 900$, donc $B(-100;900)$.
x_C est le zéro de g. On résout $f(x_C) = 0$ et on trouve $x_C = 125$, d'où $C(125;0)$.
Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC).
H a la même abscisse que B, mais a pour ordonnée 0.
Donc $H(-100;0)$.
On peut alors considérer $\mathcal{B} = AC$ et $h = BH$.
À l'aide de la formule de calcul d'une distance dans un repère orthonormé, on trouve : $AC = 1125$ et $BH = 900$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{\mathcal{B} \cdot h}{2} \\ &= \frac{1125 \cdot 900}{2} \\ &= \boxed{506\,250} \end{aligned}$$

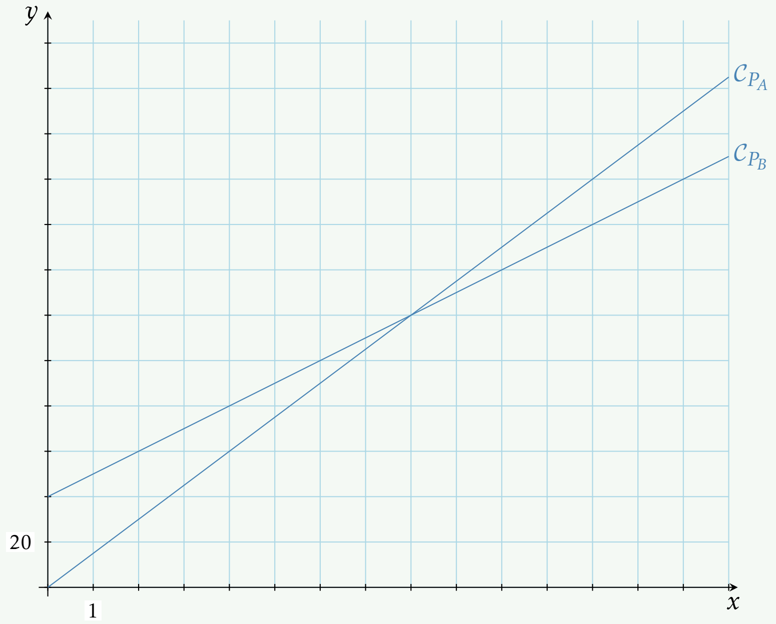
7 Dans un magasin, une cartouche d'encre pour imprimante est vendue 15 €.
Sur un site internet, la même cartouche est vendue 10 €, avec des frais de livraison fixes de 40 €.

1. Compléter le tableau suivant :

Nb de cartouches achetées	2	5	11	14
Prix en magasin (en euros)	30	75	165	210
Prix sur internet (en euros)	60	90	150	180

2. Soit x le nombre de cartouches achetées.
   (a) Exprimer le prix à payer P_A pour l'achat de x cartouches en magasin.
   (b) Exprimer le prix à payer P_B pour l'achat de x cartouche sur internet.
3. Représenter P_A et P_B dans un repère, avec $x \in [0;15]$.
4. Pour 10 cartouches achetées, où vaut-il mieux acheter ses cartouches ? *Justifier par des calculs.*
5. (a) Par le calcul, déterminer à partir de combien de cartouches le prix sur internet devient inférieur au prix en magasin.
   (b) Justifier ce résultat graphiquement.

2. (a) $P_A(x) = 15x$.
   (b) $P_B(x) = 10x + 40$.
3.



4. $P_A(10) = 150$ et $P_B(10) = 140$.
   Donc il vaut mieux acheter ses cartouches sur internet.
5. (a) On résout $P_B(x) \leq P_A(x)$ et on trouve qu'il vaut mieux acheter ses cartouches sur internet à partir de 8 cartouches achetées.
   (b) À partir de $x = 8$, $\mathcal{C}_{P_B}$ est située en dessous de $\mathcal{C}_{P_A}$.

B Fonction racine carrée

8 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
1. Calculer $f(-2)$, $f(0)$ et $f(9)$.
2. Pourquoi ne peut-on pas calculer la racine d'un nombre négatif ?
3. Quel est le domaine de définition de f ?
4. Déterminer l'ordonnée à l'origine et le zéro de f.
5. Répondre aux deux question précédentes pour la fonction $g : x \mapsto \sqrt[3]{x}$.
   NB : $\sqrt[3]{x}$, qui se lit « racine cubique de x » est le nombre qui élevé au cube vaut x.

1. $f(-2)$ n'existe pas.
   $f(0) = 0$ et $f(9) = 3$.
2. Car un nombre élevé au carré est toujours positif.
3. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$.
4. $f(0) = 0$, donc l'ordonnée à l'origine de f est zéro.
   $\sqrt{x} = 0 \Rightarrow 0^2 = x$. Donc le zéro de f est 0.
5. Le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$, en effet, contrairement à la fonction racine carrée, la racine cubique d'un nombre négatif existe.
   Ordonnée à l'origine : $\sqrt[3]{0} = 0$ car $0^3 = 0$.
   $\sqrt[3]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0^3 \Leftrightarrow x = 0$. Donc le zéro de g est 0.

9 Soient $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $g : x \mapsto \sqrt{-x}$, $h : x \mapsto -\sqrt{x}$ et $k : x \mapsto -\sqrt{-x}$.
1. En dressant un tableau de valeurs à chaque fois, tracer le graphique des fonctions ci-dessus dans un même repère.
2. Indiquer le domaine de définition, le zéro ainsi que l'ordonnée à l'origine de ces fonctions.

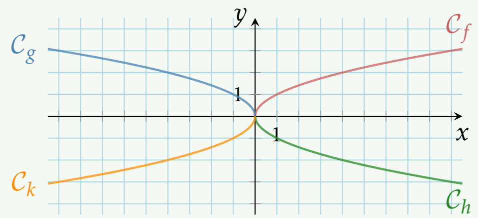
1.

x	0	1	4	9
$f(x)$	0	1	2	3

x	0	-1	-4	-9
$g(x)$	0	1	2	3

x	0	1	4	9
$h(x)$	0	-1	-2	-3

x	0	-1	-4	-9
$k(x)$	0	-1	-2	-3



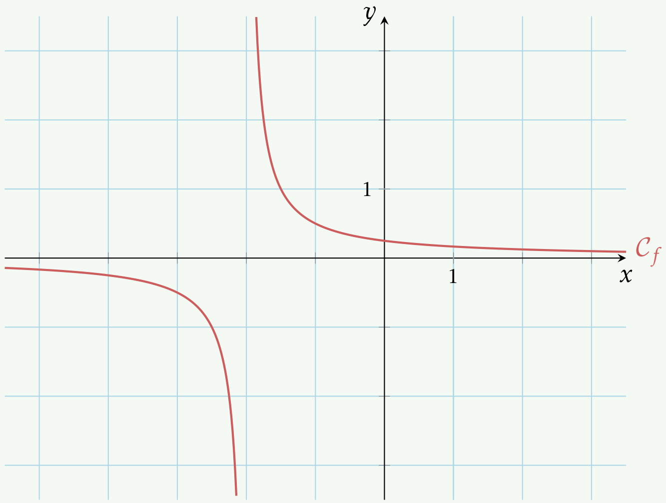
10 Soit $f : x \mapsto \sqrt{2x-2}$.
1. Calculer $f(0)$ et $f(4)$.
2. Détermine le domaine de définition de f.
3. Calculer l'ordonnée à l'origine et le(s) zéro(s) de f.
4. Tracer le graphique de f.

C Fonction inverse

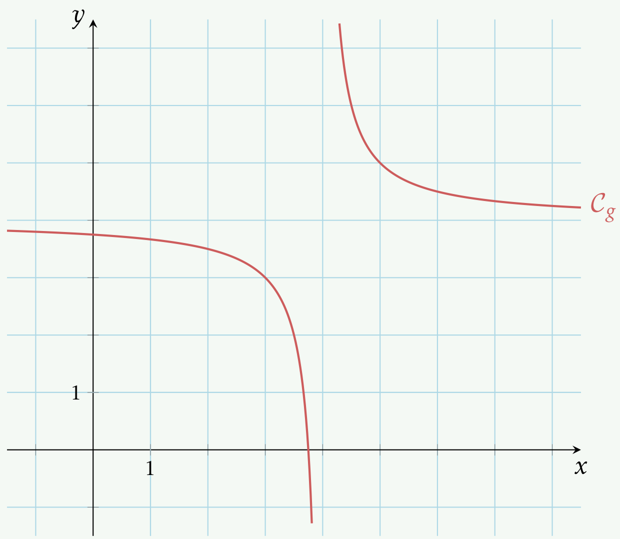
11 Soient $f : x \mapsto \frac{1}{2x+4}$ et $g : x \mapsto \frac{4x-15}{x-4}$.
Pour chaque fonction :

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Déterminer son zéro et son ordonnée à l'origine.
3. Dresser un tableau de valeurs et déterminer les asymptotes horizontale et verticale.
4. Tracer son graphique dans un repère orthonormé.

- Fonction f :
  1. $2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
  2. $f(x)=0$ si le numérateur de $\frac{1}{2x+4}$ est égal à zéro. Or ce numérateur vaut 1, donc $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$. Donc f n'a pas de zéro.
  $f(0) = \frac{1}{2\cdot 0+4} = \frac{1}{4}$. L'ordonnée à l'origine de f est $\frac{1}{4}$.
  3. f a une asymptote verticale en $x=-2$ (valeur interdite), et une asymptote horizontale en $y=\frac{1}{2}$ (on peut voir que $f(-1000) \approx \frac{1}{2}$ et $f(1000) \approx \frac{1}{2}$).
  4.



-
  1. $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$, donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
  2. $4x-15=0 \Leftrightarrow 4x=15 \Leftrightarrow x=\frac{15}{4}$, donc le zéro de f est $\frac{15}{4}$.
  $g(0) = \frac{4\cdot 0-15}{0-4} = \frac{-15}{-4} = \frac{15}{4}$ donc l'ordonnée à l'origine de g est $\frac{15}{4}$.
  3. g a une asymptote verticale en $x=4$.
  De plus, on peut voir que pour des valeurs très éloignées de 0, les images se rapprochent de 4.
  Donc g a une asymptote horizontale en $y=4$.
  4.



12 Dans chacun des cas, déterminer le domaine de définition, le(s) zéro(s) et l'ordonnée à l'origine de la fonction.

1. $f(x) = \dfrac{-2x-4}{6x+1}$ 2. $g(x) = \dfrac{2x+2}{(x+5)(x-1)}$
3. $h(x) = \dfrac{(x+4)(7x+6)}{(2x-4)(5x+15)}$

1. $6x+1=0 \Leftrightarrow 6x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{6}$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{6}\right\}$.
$-2x-4=0 \Leftrightarrow -2x=4 \Leftrightarrow x=-2$. Le zéro de f est -2.
$f(0) = \frac{-2\cdot 0-4}{6\cdot 0+1} = -\frac{4}{1} = -4$. L'ordonnée à l'origine de f est -4.
2.

$$\begin{aligned}(x+5)(x-1)=0 &\Leftrightarrow x+5=0 \quad \text{ou} \quad x-1=0\\ &\Leftrightarrow x=-5 \quad \text{ou} \quad x=1\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-5\,;\,1\}$ ($\mathbb{R}$ privé des valeurs -5 et 1).
$2x+2=0 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1$. Le zéro de g est -1.
$g(0) = \frac{2\cdot 0+2}{(0+5)(0-1)} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$.
L'ordonnée à l'origine de g est $-\frac{2}{5}$.

3.

$$\begin{aligned}(2x-4)(5x+15)=0 &\Leftrightarrow 2x-4=0 \quad \text{ou} \quad 5x+15=0\\ &\Leftrightarrow 2x=4 \quad \text{ou} \quad 5x=-15\\ &\Leftrightarrow x=2 \quad \text{ou} \quad x=-3\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}_h=\mathbb{R}\setminus\{-3\ ;\ 2\}$.

$$\begin{aligned}(x+4)(7x+6)=0 &\Leftrightarrow x+4=0 \quad \text{ou} \quad 7x+6=0\\ &\Leftrightarrow x=-4 \quad \text{ou} \quad 7x=-6\\ &\Leftrightarrow x=-4 \quad \text{ou} \quad x=-\frac{6}{7}\end{aligned}$$

Donc les zéros de h sont les réels -4 et $-\frac{6}{7}$.
$h(0)=\frac{(0+4)(7\cdot 0+6)}{(2\cdot 0-4)(5\cdot 0+15)}=\frac{24}{-60}=-\frac{2}{5}$.
L'ordonnée à l'origine de h est $-\frac{2}{5}$.

13 Soient $f: x\mapsto \frac{3}{x}$, $g: x\mapsto 3x$, $h: x\mapsto \frac{1}{x}+3$, $k: x\mapsto \frac{4}{7x}$ et $l: x\mapsto \frac{1}{x-3}$.

1. Quelles sont les fonctions dont l'image multipliée par la préimage donne une constante ?
   NB : Lorsque deux grandeurs x et y vérifient $x\cdot y=k$, avec k une constante réelle, alors on dit qu'elles sont **inversement proportionnelles**.
2. Compléter la phrase : « Si x et $f(x)$ sont inversement proportionnelles, alors quand x double, $f(x)\ldots$ ».

1. $f(x)\cdot x=\frac{3}{x}\cdot x=3$.
   $g(x)\cdot x=3x\cdot x=3x^2$.
   $h(x)\cdot x=\left(\frac{1}{x}+3\right)\cdot x=1+3x$.
   $k(x)\cdot x=\frac{4}{7x}\cdot x=\frac{4}{7}$.
   $l(x)\cdot x=\frac{1}{x-3}\cdot x=\frac{x}{x-3}$.
   Les fonctions dont l'image multipliée par la préimage donne une constante sont les fonctions f et k.
   Ce sont les fonctions de la forme $C\cdot\frac{1}{x}$, avec C une constante réelle.
2. « Si x et $f(x)$ sont inversement proportionnelles, alors quand x double, $f(x)$ **est divisé par 2** ».

D Fonction valeur absolue

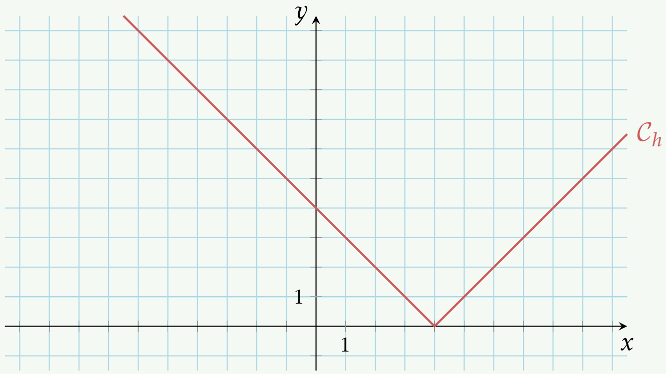
14 Soit $f: x\mapsto |x|$.

1. Calculer $|8|$, $|-8|$, $|0|$ et $|16-31|$.
2. Que représente géométriquement $|a-b|$, avec $a,b\in\mathbb{R}$?
3. Tracer le graphique de f sur $[-5;5]$ dans un repère orthonormé.
4. Soit $g: x\mapsto\sqrt{x^2}$. A-t-on $f(x)=g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$?
5. Soit $h: x\mapsto |x-4|$
   (a) Compléter : $h(x)=\begin{cases}\ldots & \text{si} \quad \ldots\\ \ldots & \text{si} \quad \ldots\end{cases}$
   (b) Détermine le domaine de définition, le(s) zéro(s) et l'ordonnée à l'origine de h.
   (c) Tracer le graphique de h sur $[-10;10]$ dans un repère orthonormé.
6. Même question avec $k: x\mapsto |x+3|$.

1. $|8|=8$.
   $|-8|=-(-8)=8$.
   $|0|=0$.
   $|16-31|=|-15|=-(-15)=15$.
2. $|a-b|$ représente la distance entre les réels a et b sur la droite des réels.
3. *Voir courbe représentative du cours.*
4. Oui, c'est un point sur lequel il faut être vigilant.
   Il est faux d'écrire que $\sqrt{x^2}=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   En effet, lorsque $x<0$, alors $\sqrt{x^2}=-x$.
   Par contre, on a bien $\sqrt{x^2}=|x|$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
5. (a) $h(x)=\begin{cases}x-4 \text{ si } x-4\geq 0\\ -(x-4) \text{ si } x-4<0\end{cases}=\begin{cases}x-4 \text{ si } x\geq 4\\ -x+4 \text{ si } x<4\end{cases}$.
   (b) $\mathcal{D}_h=\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}h(x)=0 &\Leftrightarrow |x-4|=0\\ &\Leftrightarrow x-4=0\\ &\Leftrightarrow x=4\end{aligned}$$

   Donc h admet un zéro : 4.
   $h(0)=|0-4|=|-4|=-(-4)=4$.
   L'ordonnée à l'origine de h est 4.
   (c)



6. (a) $k(x) = \begin{cases} x-3 \text{ si } x+3 \geq 0 \\ -(x+3) \text{ si } x+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+3 \text{ si } x \geq -3 \\ -x-3 \text{ si } x < -3 \end{cases}.$

(b) $\mathcal{D}_k = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} k(x) = 0 &\Leftrightarrow |x+3| = 0 \\ &\Leftrightarrow x+3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

Donc k admet un zéro : -3.
$k(0) = |0+3| = |3| = 3$.
L'ordonnée à l'origine de k est 3.

(c)