5 Trigonométrie dans un triangle rectangle

Rappel

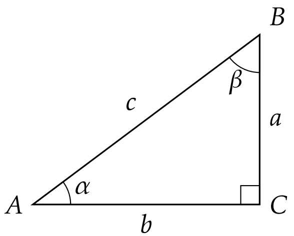
1.
   - Théorème de Pythagore : Si un triangle est rectangle, alors le carré de son hypoténuse est égal à la somme du carré des deux autres côtés.
   - Réciproque du théorème de Pythagore : Si dans un triangle le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme du carré des deux autres cotés, alors ce triangle est rectangle.
2. Notations : **$[AB]$** est le segment reliant A à B, et **AB** représente la longueur de ce segment.
3. Un angle de mesure supérieure à 90° est dit **obtus**, tandis qu'un angle dont la mesure est inférieure à 90° est dit **aigu**.
4. Deux angles dont la somme vaut 180° sont dits **complémentaires** et deux angles dont la somme vaut 180° sont dits **supplémentaires**.

I Rapports trigonométriques

I.1 Vocabulaire et notations

Dans ce qui suit nous considérerons un triangle ABC, comme ci-dessous, avec les notations indiquées pour les longueurs des côtés et les différents angles.

- $[AB]$ est l'**hypoténuse** de ABC est $AB = c$.
- $[AC]$ est le côté **adjacent** à α, et $AC = b$.
- $[BC]$ est le côté **opposé** à α, et $BC = a$.



Les notions de côté opposé et côté adjacent n'ont de sens qu'en parlant d'un angle en particulier. Si on considère l'angle β, ils ne sont plus les mêmes.

I.2 Cosinus, sinus et tangente d'un angle

Définition 5.1 – Rapport trigonométriques

- Le **cosinus** de l'angle α, noté **$\cos(\alpha)$** est défini comme suit :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{b}{c}$$

- Le **sinus** de l'angle α, noté **$\sin(\alpha)$** est défini comme suit :

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{a}{c}$$

- La **tangente** de l'angle α, notée **$\tan(\alpha)$** est définie comme suit :

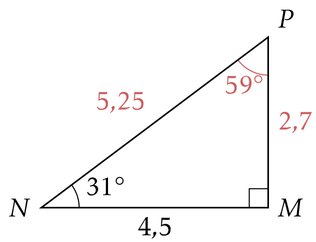
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{a}{b}$$

Remarque(s) :

- Un moyen mnémotechnique connu pour les retenir : "sohcahtoa". On retient la prononciation et on sait alors que pour la respecter, les lettres "soh" (pour le sinus) et "cah" (pour le cosinus) sont forcément dans cet ordre.

Exemple 5.1 :

Soit MNP le triangle dessiné ci-contre.
Calculer NP, MP et $\widehat{MPN}$. *Si nécessaire, on arrondira à 10^{-2} près.*



$[NP]$ est l'hypoténuse de MNP et $[MN]$ est le côté adjacent à $\widehat{MNP}$.
On sait que $\cos\left(\widehat{MNP}\right) = \frac{MN}{NP}$.

Or :

$$\cos\left(\widehat{MNP}\right) = \frac{MN}{NP} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{MNP}\right) \times NP = MN$$
$$\Leftrightarrow NP = \frac{MN}{\cos\left(\widehat{MNP}\right)}$$

Ainsi : $\boxed{NP = \frac{4{,}5}{\cos(31°)} \approx 5{,}25}$.

$[MP]$ est le côté opposé à $\widehat{MNP}$.

On sait que $\tan\left(\widehat{MNP}\right) = \frac{MP}{MN}$, ce qui implique $MP = \tan\left(\widehat{MNP}\right) \times MN$.
Ainsi : $\boxed{MP = \tan(31°) \times 4{,}5 \approx 2{,}7}$.
Enfin, $\widehat{MNP}$ et $\widehat{MPN}$ sont complémentaires.
On a donc $\boxed{\widehat{MPN} = 90 - \widehat{MNP} = 59}$.

Exercices : A

II Relations trigonométriques

Propriété 5.1 – Relations trigonométriques de base

Pour tout angle aigu α :

1. $\mathbf{0} < \sin(\alpha) < \mathbf{1}$ et $\mathbf{0} < \cos(\alpha) < \mathbf{1}$
2. $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
3. $\tan(\alpha) \in \mathbf{]0;+\infty[}$
4. $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \mathbf{1}$

Démonstration

1. $0 < a < c \Leftrightarrow \frac{0}{c} < \frac{a}{c} < \frac{c}{c} \Leftrightarrow 0 < \sin(\alpha) < 1$.
   De même : $0 < b < c \Leftrightarrow \frac{0}{c} < \frac{b}{c} < \frac{c}{c} \Leftrightarrow 0 < \cos(\alpha) < 1$
2. $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{\cancel{c}} \times \frac{\cancel{c}}{b} = \frac{a}{b} = \tan(\alpha)$.
3. a est une longueur non nulle, donc $a \in]0;+\infty[$.
   On en déduit que $\frac{a}{b} \in \left]\frac{0}{b};+\infty\right[$, soit $\frac{a}{b} \in]0;+\infty[$.
   Donc $\tan(\alpha) \in]0;+\infty[$.
4. $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{b^2+a^2}{c^2}$.
   Or d'après le théorème de Pythagore, $b^2 + a^2 = c^2$.
   Donc $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \frac{c^2}{c^2} = 1$.

□

Exercices : B

III Fonctions réciproques et calcul d'angles

Propriété 5.2 – Trigonométrie et calcul d'angles

Toujours dans le même triangle ABC, on a :

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{\sin^{-1}}\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{\cos^{-1}}\left(\frac{b}{c}\right)$$

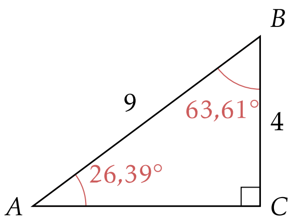
$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{\tan^{-1}}\left(\frac{a}{b}\right)$$

Remarque(s) :

- $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ et $\tan^{-1}$ sont appelées **fonctions réciproques** des fonctions cos, sin et tan. Elle sont aussi notées **arccos**, **arcsin** et **arctan**.

Exemple 5.2 :

Déterminer la valeur des angles du triangle ci-contre :



$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{9}$.
Ainsi : $\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{9}\right) \approx 63{,}61°$.
$\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{9}$.
Donc $\widehat{BAC} = \sin^{-1}\left(\frac{4}{9}\right) \approx 26{,}39°$.

Exercices : C