A Rapports trigonométriques

A.1 Questions de cours

1 Soit ABC un triangle rectangle en B.

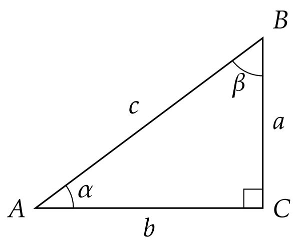
1. Énoncer les formules de $\cos\left(\widehat{ACB}\right)$, $\sin\left(\widehat{ACB}\right)$ et $\tan\left(\widehat{ACB}\right)$.
2. Même consigne pour l'angle $\widehat{BAC}$.

1. $\cos\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{BC}{AC}$.
   $\sin\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{AB}{AC}$.
   $\tan\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{AB}{CB}$.
2. $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{AB}{AC}$.
   $\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{BC}{AC}$.
   $\tan\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{BC}{AB}$.

A.2 Faire ses gammes

2 Compléter le tableau ci-dessous en justifiant.

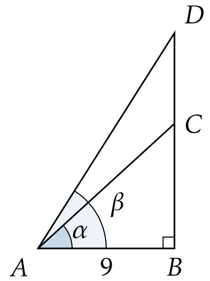
	a	b	c	α	β
1.	9,42	24,54	26,29	21°	69°
2.	41,33	11,85	43	74°	16°
3.	24,49	32,5	40,69	37°	53°
4.	27,31	6,31	28,03	77°	13°



1.
   - On connaît α et la longueur du côté opposé à α.
     On sait que $\tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{a}{b}$.
     Or : $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \tan(\alpha) \times b = a \Leftrightarrow b = \frac{a}{\tan(\alpha)}$.
     Ainsi : $b = \frac{9,42}{\tan(21°)} \approx 24,54$.
   - $\sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{c}$.
     Or : $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \sin(\alpha) \times c = a \Leftrightarrow c = \frac{a}{\sin(\alpha)}$.
     Ainsi : $c = \frac{9,42}{\sin(21°)} \approx 26,29$.
   - Sachant que ABC est rectangle en C et que la somme des angles dans un triangle vaut 180°, on a que α et β sont complémentaires.
     $\alpha + \beta = 90° \Leftrightarrow \beta = 90° - \alpha = 69°$.
2.
   - $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a = \sin(\alpha) \times c$.
     Ainsi : $a = \sin(74°) \times 43 \approx 41,33$.
   - $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = \cos(\alpha) \times c$.
     Ainsi : $b = \cos(74°) \times 43 \approx 11,85$.
   - $\beta = 90° - \alpha = 16°$.
3.
   - $\tan(\beta) = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a = \frac{b}{\tan(\beta)}$.
     Ainsi : $a = \frac{32,5}{\tan(53°)} \approx 24,49$.
   - $\sin(\beta) = \frac{b}{c} \Leftrightarrow c = \frac{b}{\sin(\beta)}$.
     Ainsi : $c = \frac{32,5}{\sin(53°)} \approx 40,69$.
   - $\alpha = 90° - \beta = 37°$.
4.
   - $\tan(\beta) = \frac{b}{a} \Leftrightarrow b = \tan(\beta) \times a$.
     Ainsi : $b = \tan(13°) \times 27,31 \approx 6,31$.
   - $\cos(\beta) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow c = \frac{a}{\cos(\beta)}$.
     Ainsi : $c = \frac{27,31}{\cos(13°)} \approx 28,03$.
   - $\alpha = 90° - \beta = 77°$.

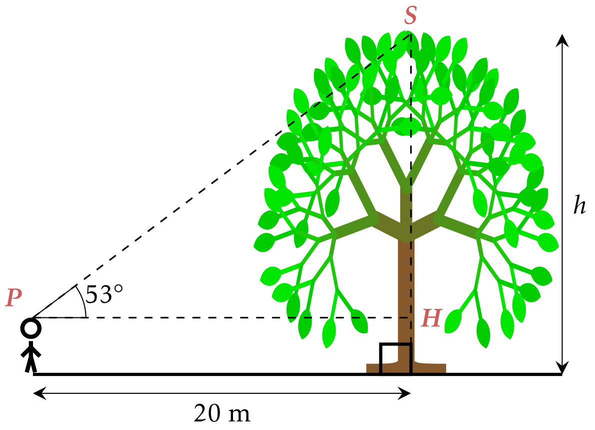
A.3 Exercices d'entraînement

3 En considérant la figure ci-dessous, et sachant que $\alpha = 35°$ et $\beta = 60°$ déterminer CD.



$\tan(\alpha) = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow BC = \tan(\alpha) \times AB$. Donc : $BC = \tan(35°) \times 9 \approx 6,3$.
De plus : $\tan(\beta) = \frac{BD}{AB} \Leftrightarrow BD = \tan(\beta) \times AB$.
Donc : $BD = \tan(60°) \times 9 \approx 15,59$.
On en déduit : $CD = BD - BC \approx 15,59 - 6,3 = \boxed{9,29}$.

4 Sachant que la personne dessinée sur la figure ci-dessous mesure 1,75m, déterminer la hauteur h de l'arbre.



Soient H est le point situé sur le tronc, à la même hauteur que la personne, et S et le sommet de l'arbre.
Notons également P le sommet de l'angle indiqué.
On sait que $\widehat{SPH} = 53°$, $PH = 20$.
Dans le triangle SPH, on a : $\tan(\widehat{SPH}) = \frac{SH}{PH}$, soit $SH = \tan(\widehat{SPH}) \times PH$.
Ainsi : $SH = \tan(53) \times 20 \approx 26{,}54$.
On en déduit : $h = SH + 1{,}75 \approx 28{,}29$.
L'arbre mesure donc environ $\boxed{28{,}29 \text{ m}}$.

5 Un observateur situé au bord de la mer oberve la mont Fuji et note un angle entre le sol et le sommet du volcan de 21°.
Sachant que le sommet en question culmine à 3 778 m d'altitude, quelle est la distance à vol d'oiseau entre l'observateur et le sommet du mont Fuji ?

On représenter la situation à l'aide d'un triangle ABC rectangle en C, où B serait le sommet du volcan, et A la position de l'observateur.
On cherche alors la longueur de $[AC]$.
On a : $\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AC}$, soit $AC = \frac{BC}{\tan(\widehat{BAC})}$.
On en déduit : $AC = \frac{3778}{\tan(21°)} \approx 9842{,}03$.
L'observateur est donc situé à environ $\boxed{9{,}84 \text{ km}}$ du sommet du volcan à vol d'oiseau.

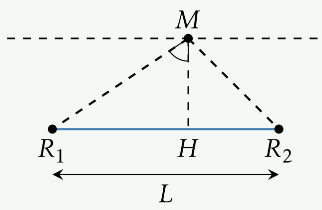
6 Un avion s'envole depuis une piste située à 300 m d'altitude, en formant un angle constant de 11° par rapport à la piste (supposée horizontale). Il parcourt ainsi 3 000 m à vol d'oiseau.
Quelle est alors son altitude ?

On se place dans un triangle ABC rectangle en C où A est la position initiale de l'avion, B sa position finale, et C le projeté orthogonale de l'avion sur le sol à sa position finale.
On connaît ainsi $\widehat{BAC}$, ainsi que son côté adjacent, et on cherche la longueur du côté opposé $[BC]$.

$$\tan\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow BC = \tan\left(\widehat{BAC}\right) \times AC$$
$$\Leftrightarrow BC = \tan(11°) \times 3\,000$$

Donc $BC \approx 583{,}14$.
Donc l'avion se situe à environ 883,14 mètres d'altitude.

7 Une personne se situe dans une montgolfière à 600 m d'altitude au-dessus d'un lac.
Lorsqu'elle regarde l'une des rives du lac, son regard forme un angle de 47° avec l'horizontale, tandis que lorsqu'elle regarde l'autre rive, son regard forme un angle de 35° avec l'horizontale.
Faire un schéma représentant la situation, puis déterminer la largeur du lac.
NB : Les angles indiqués sont appelés **angles de dépression**. Ce sont les angles formés par le regard par rapport à l'horizontale lorsqu'on regarde un objet vers le bas. Lorsque le ragard est tourné vers la haut, on parle d'**angle d'élévation**.

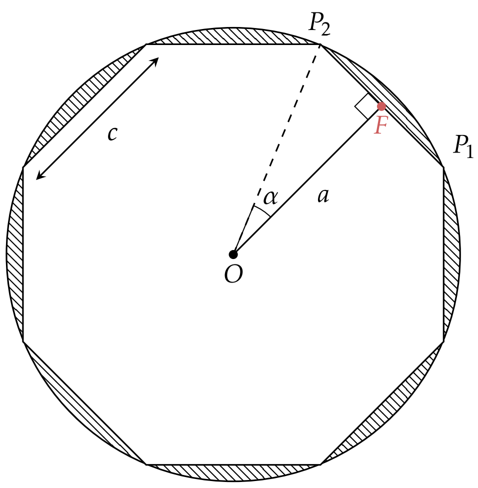


$L \approx 1416{,}4$.

A.4 Exercices d'approfondissement

8 On a tracé ci-contre un octogone régulier inscrit dans un cercle de rayon 12 cm.

1. (a) Déterminer la mesure de $\widehat{P_1OP_2}$.
   (b) En déduire la mesure de l'angle α.
2. (a) En déduire la valeur de l'apothème a.
   NB : l'apothème est le rayon du cercle inscrit dans un polygône.
   (b) Calculer la longueur c d'un côté de l'octogone.
   (c) En déduire le périmètre de l'octogone.
3. (a) Calculer l'aire du triangle OP_1P_2.
   (b) En déduire l'aire de l'octogone.
   (c) En déduire l'aire de la partie hachurée.

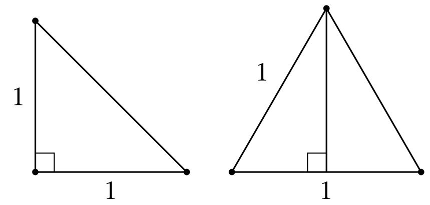


1. (a) $\widehat{P_1OP_2} = 45°$
   (b) Soit F le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OP_1P_2.
   OP_1P_2 est isocèle en O. Or dans un triangle isocèle, la hauteur et la bissectrice issues du sommet principal sont confondues.
   Donc (OF) est la bissectrice de $\widehat{P_1OP_2}$.
   Donc $\alpha = \frac{45}{2} = 22{,}5°$
2. (a) $a = \cos(\alpha) \times r = \cos(22{,}5°) \times 12 \approx 11{,}09$.
   (b) $c = 2 \times \sin(\alpha) \times r = 2 \times \sin(22{,}5°) \times 12 \approx 9{,}18$.
   (c) $p = 8 \times c \approx 73{,}4$.
3. (a) $\mathcal{A}_{OP_1P_2} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{P_1P_2 \times a}{2} \approx \frac{9{,}18 \times 11{,}09}{2} = 50{,}9$.
   (b) $8 \times \mathcal{A}_{OP_1P_2} = 8 \times 50{,}9 = 407{,}2$.
   (c) $\pi r^2 = \pi \times 12^2 = 144\pi$.
   $144\pi - 407{,}2 \approx 45{,}19$.
   Donc l'aire de la partie hachurée mesure environ $45{,}19\text{cm}^2$.

B Relations trigonométriques

9

À l'aide des triangles dessinés ci-contre et des rapports trigonométriques, déterminer sans calculatrice les valeurs exactes de :

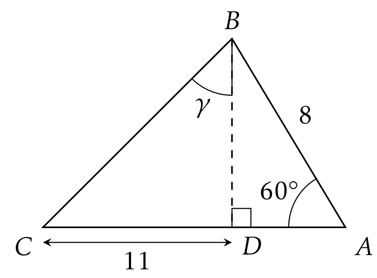


1. • $\sin(30°) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$
   • $\cos(30°) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   • $\tan(30°) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
2. • $\sin(60°) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   • $\cos(60°) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$
   • $\tan(60°) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$
3. • $\sin(45°) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   • $\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   • $\tan(45°) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

C Fonctions réciproques et calcul d'angles

10

Soit ABC le triangle dessiné ci-contre.
Calculer BC et γ.



$\sin(\widehat{BAD}) = \frac{BD}{AB} \Leftrightarrow BD = \sin(\widehat{BAD}) \times AB \Leftrightarrow BD = \sin(60°) \times 8$.
On en déduit que $BD = 4\sqrt{3}$ (valeur exacte car $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$).
Le triangle BCD est rectangle en D.
Ainsi, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + CD^2 \\ &= \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 11^2 \\ &= 169 \end{aligned}$$

D'où : $BC = \sqrt{169} = 13$. Enfin : $\tan(\gamma) = \frac{CD}{BD} = \frac{11}{4\sqrt{3}}$.

D'où : $\gamma = \arctan\left(\frac{11}{4\sqrt{3}}\right) \approx 57{,}8°$.

11 Sur une route, un panneau de signalisation indique une pente à 18%.

1. Quel angle forme la route avec l'horizontale ?
2. En déduire le dénivellé sur un parcours de 1,5 km effectué sur cette route.

1. Notons α l'angle formé avec l'horizontale.
   On a : $\tan(\alpha) = \frac{18}{100}$.
   D'où : $\alpha = \arctan\left(\frac{18}{100}\right) \approx 10{,}2°$.
2. On peut modéliser la situation à l'aide d'un tiangle ABC rectangle en C tel que $\widehat{BAC} = \alpha = \approx 10{,}2°$ et $AB = 1{,}5$.
   On cherche alors BC.
   Or : $\sin(\alpha) = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow BC = \sin(\alpha) \times AB \Leftrightarrow BC = \sin(\alpha) \times 1{,}5$.
   On en déduit : $BC \approx \sin(10{,}2°) \times 1{,}5 \approx 0{,}27$.
   Donc le dénivellé est de environ 0,27.

12 Un toit a un angle d'inclinaison de 25°.
Quel est sa pente en % ?

Notons p la pente du toit.
$\tan(25°) = \frac{p}{100} \Leftrightarrow p = \tan(25°) \times 100$.
Ainsi : $p \approx 46{,}63\%$.

13 Une route a une pente de 11%.

1. Quelle distance horizontale a-t-on parcourue en suivant la route sur 2300 m ?
2. Sur le même parcours, quelle est la dénivellation ?

1. On calcule d'abord l'angle α formé par la route avec l'horizontale.
   $\alpha = \arctan\left(\frac{11}{100}\right) \approx 6{,}28°$.
   Notons d_h la distance horizontale parcourue.
   On a alors : $d_h = \cos(\alpha) \times 2300 \approx 2286{,}2$.
2. Notons d la dénivellation sur ce parcours.
   On a $d = \sin(\alpha) \times 2300 \approx 251{,}59$ m.

14 Un automobiliste roule 500 m sur une route faisant un angle de 20° avec l'horizontale.

1. Quelle est la pente de cette route ?
2. À quelle hauteur au-dessus de son point de départ l'automobiliste se trouve-t-il ?

1. Notons p la pente en %.
   $\tan(20°) = \frac{p}{100} \Leftrightarrow p = \tan(20°) \times 100$.
   Donc $p \approx 36{,}4\%$.
2. Notons h la hauteur à laquelle se trouve l'automobiliste par rapport à son point de départ.
   On a : $h = \sin(20°) \times 500 \approx 171{,}01$.