4 Généralités sur les fonctions

I Définition

Définition 4.1 – Notion de fonction

Une fonction f est définie par :

1. Un **ensemble de départ** A.
2. Un **ensemble d'arrivée** B.
3. Une **expression**, notée $f(x)$, qui permet de faire correspondre à chaque élément x de l'ensemble de départ, un élément de l'ensemble d'arrivée.

On note :

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Définition 4.2 – Vocabulaire

Soit f une fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Soient $x \in A$ et $y \in B$ tels que $f(x) = y$.

1. L'ensemble des réels qui ont une image par f est appelé **ensemble de définition de f**, noté $\mathcal{D}_f$.
2. x est appelé **antécédent** de y par f.
3. y est appelé **image** de x par f.
4. Tout réel $x \in A$ tel que $f(x) = 0$ est appelé **zéro de f**.

Remarque(s) :

- Un $y \in B$ peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents par f, mais tout $x \in A$ admet une unique image par f.
- Le troisième point se formule également ainsi : « les antécédents de 0 par f sont appelés zéros de f ».
- Dans l'écriture il ne faut pas confondre les différentes notations :
  - « f » désigne la fonction.
  - « $f(x)$ » désigne l'expression de la fonction.
  - « $f : x \mapsto f(x)$ » se lit « la fonction f qui à x associe $f(x)$ ».

Exemple 4.1 :

Soit $f : x \mapsto x^2$.

1. Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?
   On peut calculer le carré de n'importe quel réel, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. (a) Quelle est l'image de 4 par f ?
   $f(4) = 4^2 = 16$.
   (b) Est-elle unique ?
   Oui, l'image d'un réel par une fonction est toujours unique.
3. (a) Existe-t-il un antécédent de 9 par f.
   3 est un antécédent de 9 par f car $f(3) = 3^2 = 9$.
   (b) Est-il unique ?
   Non, -3 est aussi un antécédent de 9 par f.
4. Existe-t-il un antécédent de -1 par f ?
   Non, il n'existe pas de réel dont le carré vaut -1.
5. (a) Existe-t-il un antécédent de 0 par f ?
   Oui, $0^2 = 0$, donc 0 est un antécédent de 0 par f.
   (b) Est-il unique ?
   Oui, il n'existe pas d'autre réel dont le carré vaut 0.

II Courbe représentative d'une fonction

Définition 4.3 – Courbe représentative d'une fonction

Dans un repère, la courbe représentative de f, souvent notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$, où x appartient à D_f.

Définition 4.4 – Ordonnée à l'origine

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
$f(0)$ est appelé **ordonnée à l'origine** de f.

Remarque(s) :

- Les zéros d'une fonction sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

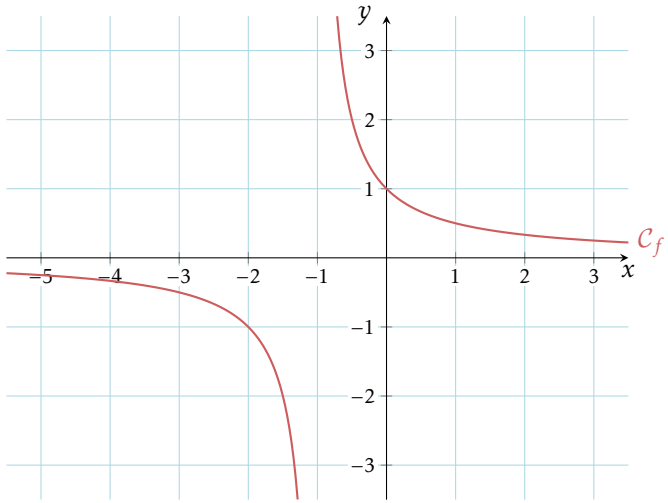
Exemple 4.2 – Tableau de valeurs et allure d'une courbe représentative :

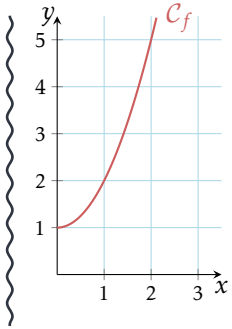
Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
   Tout réel, à l'exception de -1 a une image par f.
   Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. Dresser le tableau de valeurs de f entre -4 et 2 avec un pas de $\frac{1}{2}$.

x	-4	$-\frac{7}{2}$	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$

3. Dans le repère ci-dessous, en déduire le plus précisément possible une allure de $\mathcal{C}_f$.





$f(x_M) = f(2) = 2^2 + 1 = 5 = y_M$.
$f(x_N) = f(12) = 12^2 + 1 = 144 + 1 = 145 = y_N$.
Donc les points $M(2;5)$ et $N(12;145)$ appartiennent à $\mathcal{C}_f$.

Propriété 4.1 – Appartenance d'un point à une courbe représentative

- Si $M(x;y) \in \mathcal{C}_f$, alors $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$.
- Réciproquement : si $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$, alors $M(x;y)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.

Remarque(s) :

- Il y a donc équivalence : $M\big(x;y\big) \in \mathcal{C}_f$ **si et seulement si** $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) = y$.

Exemple 4.3 :

Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$ définie sur $[0;+\infty[$ (on peut aussi dire : "soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2$").
Démontrer que les points $M(2;5)$ et $N(12;145)$ appartiennent à $\mathscr{C}_f$.