A Introduction

A.1 Faire ses gammes

1 Compléter le tableau suivant. D'un côté, on définit une fonction verbalement, et de l'autre on donne son expression algébrique.

	Fonction définie verbalement	Fonction définie par son expression algébrique
(a)	« tripler puis soustraire 4 »	$x \mapsto 3x-4$
(b)	« ajouter 7 puis doubler »	$t \mapsto 2\cdot(t+7)$
(c)	« ajouter 1 puis élever au carré »	$x \mapsto (x+1)^2$
(d)	« élever au carré puis soustraire 1 »	$y \mapsto y^2-1$

2 Soit $f : x \mapsto 3x-4$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quelle est l'image de 2 par f ?
3. 5 admet-il des antécédents par f ? Si oui, déterminer le(s)quel(s).
4. Déterminer l'ordonnée à l'origine de f.
5. Déterminer les zéros de f.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. $f(2) = 3\cdot 2-4 = 2$.
3. $$\begin{aligned} f(x)=5 &\Leftrightarrow 3x-4=5 \\ &\Leftrightarrow 3x=9 \\ &\Leftrightarrow x=3 \end{aligned}$$
   Donc 5 admet un unique antécédent par f, qui est 3.
4. $f(0) = 3\cdot 0-4 = -4$.
   L'ordonnée à l'origine de f est -4.
5. $$\begin{aligned} f(x)=0 &\Leftrightarrow 3x-4=0 \\ &\Leftrightarrow 3x=4 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{4}{3} \end{aligned}$$
   Donc $\frac{4}{3}$ est l'unique zéro de f.

3 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions définies de la manière suivante :

1. $f : x \mapsto x^2+5x-9$.
2. $f(x) = \frac{3}{x}$
3. $f(x) = \frac{7}{x+9}$.

1. $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$.
2. $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*}$. N.B est une notation désignant l'ensemble des réels, privé de la valeur 0. On pourrait aussi noter cet ensemble $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ou encore $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
3. La division par zéro n'existe pas. On ne doit donc pas avoir $x+9=0$.
   On cherche donc dans ce genre de cas pour quelles valeurs de x le dénominateur d'annule.
   $$x+9=0 \Leftrightarrow x=-9$$
   On en déduit que $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-9\}}$.

4 Soit $f : x \mapsto \frac{1}{3x-7}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quelle est l'image de 4 par la fonction f ?

1. $$\begin{aligned} 3x-7=0 &\Leftrightarrow 3x=7 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{7}{3} \end{aligned}$$
   Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{7}{3}\right\}$.
2. $f(4) = \frac{1}{3\cdot 4-7} = \frac{1}{5}$.

A.2 Exercices d'entraînement

5 Quel est l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$?

La racine carrée d'un nombre strictement négatif n'existe pas.
De plus :

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

On en déduit que $\mathcal{D}_f=[0;+\infty[\setminus\{1\}$, que l'on peut aussi noter $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$.

6 Quel est l'ensemble de définition de la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{2x+5}$?

La racine carrée d'un nombre strictement négatif n'existe pas.

$$\begin{aligned} 2x+5\geq 0 &\Leftrightarrow 2x\geq -5 \\ &\Leftrightarrow x\geq -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_f=\left[-\frac{5}{2};+\infty\right[$.

7 Soit $h: t\mapsto (t-1)(t+5)\left(t-\frac{1}{3}\right)$.

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?
2. Déterminer l'ordonnée à l'origine de h.
3. Déterminer l'ensemble des zéros de h.

1. $h(t)$ est un polynôme (on s'en convaint en développant l'expression), donc $\mathcal{D}_h=\mathbb{R}$.
2. $h(0)=(0-1)(0+5)(0-\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$.
   Donc l'ordonnée à l'origine de h est $\frac{5}{3}$.
3.

$$\begin{aligned} h(t)=0 &\Leftrightarrow (t-1)(t+5)(t-\frac{1}{3})=0 \\ &\Leftrightarrow t-1=0 \quad \text{ou} \quad t+5=0 \quad \text{ou} \quad t-\frac{1}{3}=0 \\ &= t=1 \quad \text{ou} \quad t=-5 \quad \text{ou} \quad t=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

   Les zéros de f sont donc -5, $\frac{1}{3}$ et 1.

8 Soit $f: x\mapsto \frac{x^2-4}{x^2-9}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quel est l'ensemble des zéros de f ?

1. On cherche les valeurs qui annulent le dénominateur.

$$\begin{aligned} x^2-9=0 &\Leftrightarrow x^2-3^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x-3)=0 \quad \text{(identité remarquable } a^2-b^2=(a+b)(a-b)\text{)} \\ &\Leftrightarrow x+3=0 \quad \text{ou} \quad x-3=0 \\ &\Leftrightarrow x=-3 \quad \text{ou} \quad x=3 \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$.
2.

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2-9}=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-4=0 \quad \text{pour tout } x\notin\{-3;3\} \text{ (*)} \\ &\Leftrightarrow x^2-2^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x-2)=0 \\ &\Leftrightarrow x+2=0 \quad \text{ou} \quad x-2=0 \\ &\Leftrightarrow x=-2 \quad \text{ou} \quad x=2 \end{aligned}$$

   (*) cette étape est délicate.
   On multiplie les deux membres de l'équation par x^2-9 afin de ne plus avoir de dénominateur dans le membre de gauche.
   Le membre de droite reste 0, car 0 fois n'importe quoi est égal à 0.
   Ce qui est délicat est qu'il faut préciser à cette étape que x doit être différent de -3 et de 3, car sinon, on aurait $x^2-9=0$.
   Or si $x^2-9=0$, l'implication de droite à gauche « $\Leftarrow$ » n'est pas vraie car on diviserait alors par zéro. En conséquence on ne pourrait pas utiliser l'équivalence « $\Leftrightarrow$ ».
   Nous aurons l'occasion de revenir sur ce genre de raisonnement et de le comprendre un peu mieux plus tard.

9 Soit f définie par $f(x)=5x+6$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer l'image de 4 par f.
3. Calculer l'image de -3 par f.
4. Déterminer le(s) antécédent(s) de 11 par f.
5. Déterminer les valeurs de x telles que $f(x)=2$.

1. $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ car $f(x)$ est un polynôme.
2. $f(4)=5\cdot 4+6=26$.
3. $f(-3)=5\cdot(-3)+6=-9$.

4.

$$\begin{aligned} f(x) = 11 &\Leftrightarrow 5x + 6 = 11 \\ &\Leftrightarrow 5x = 11 - 6 \\ &\Leftrightarrow 5x = 5 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Donc 1 est l'unique antécédent de 11 par f.

5.

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\Leftrightarrow 5x + 6 = 2 \\ &\Leftrightarrow 5x = -4 \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

10 Soit $f : x \mapsto 4x^2 - x + 2$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Déterminer les antécédents de 2 par f.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car $f(x)$ est un polynôme.
2.

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\Leftrightarrow 4x^2 - x + 2 = 2 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(4x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 4x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 4x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

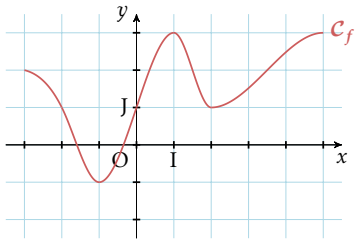
Les antécédents de 2 par f sont donc 0 et $\frac{1}{4}$.

B Courbe représentative d'une fonction

B.1 Faire ses gammes

11

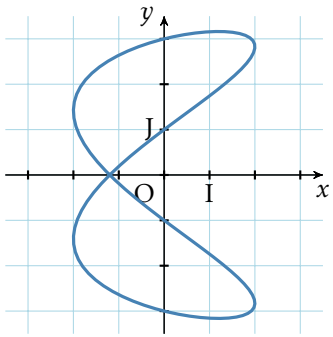
Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée ci-contre.



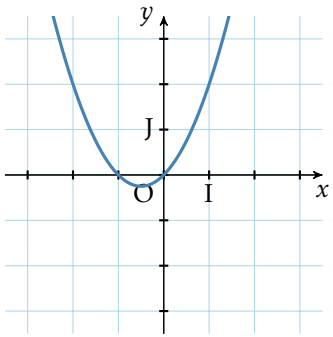
1. Expliquer pourquoi $f(1) = 3$.
   Le point d'abscisse 1 appartenant à $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 3.
2. Traduire l'égalité précédente par une phrase comportant le mot « image ».
   1 est un antécédent de 3 par f.
3. Lire graphiquement :
   - l'image de 5 par f ; $f(5) = 3$
   - les antécédents de 1 par f. Les antécédent de 1 par f sont -2, 0, et 2.

12 Les courbes ci-dessous peuvent-elles représenter une fonction ? Si non, expliquer pourquoi.

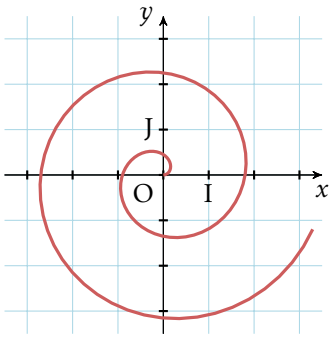
a)



b)



c)



Nous avons vu qu'une fonction associe à un élément de son ensemble de départ un **unique** élément de son ensemble d'arrivée.
En effet, lorsqu'on calcule une image, on ne fait qu'effectuer un calcul. Il ne peut donc pas y avoir plusieurs résultats.
Cela implique graphiquement qu'il ne peut pas y avoir plusieurs points de la courbe représentative d'une fonction qui aient la même abscisse car sinon cela voudrait dire que cette valeur (en abscisse) a plusieurs images par la fonction.

a) On remarque que les points $(0;3)$, $(0;1)$, $(0;-1)$ et $(0;-3)$ appartiennent à la courbe.
   S'il s'agissait de la courbe représentative d'une fonction f, on aurait alors $f(0) = 3$, mais aussi $f(0) = 1$, $f(0) = -1$ et $f(0) = -3$, ce qui est impossible.
   Donc cette courbe ne peut pas représenter une fonction.
b) Oui.
c) Tout comme la première courbe, celle-ci ne peut pas représenter une fonction.
   Cela voudrait sinon dire qu'on ait $f(0) = 0$, mais aussi $f(0) \approx 0{,}5$, $f(0) \approx 2{,}2$,

etc.

13 Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$.

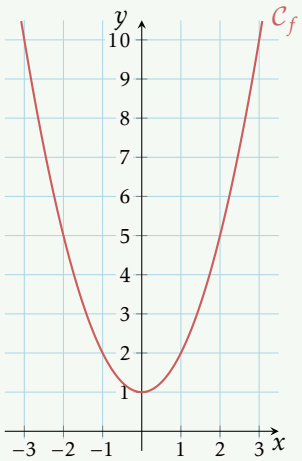
1. Dresser le tableau de valeurs de la fonction f entre -3 et 3 avec un pas de 0,5.
2. Dans un repère, placer les points associés.
3. En déduire une allure de $\mathcal{C}_f$.

1.

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$f(x)$	10	7,25	5	3,25	2	1,25	1	1,25	2	3,25	5	7,25	10

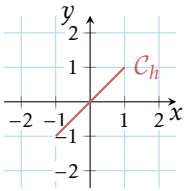
2.

3.



14 Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[-1;1]$ par $h(x) = x^3$.

1. À l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de h avec un pas de 0,5 entre -1 et 1.
2. Un élève a tenté de tracer ci-contre la courbe représentative de h.
   Comment le convaincre qu'il se trompe ?



1.

x	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1
$h(x)$	-1	$-0{,}125$	0	$0{,}125$	1

2. D'après la question précédente, le point de coordonnées $(-0{,}5;-0{,}125)$ doit appartenir à $\mathcal{C}_h$. Or il n'appartient pas à la courbe tracée.

B.2 Exercices d'entraînement

15 Soit $f : x \mapsto \cos(x)$.

1. Dresser le tableau de valeurs de la fonction f entre -2π et 2π avec un pas de $\frac{\pi}{4}$. On arrondira à 0,01 près si nécessaire.
2. Dans un repère, placer les points associés puis en déduire une allure de $\mathcal{C}_f$.

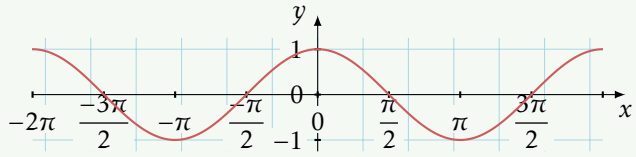
⚠ Les angles doivent être paramétrés en « radians » pour cet exercice.
Sinon, vous pouvez aussi dresser le tableau de de valeurs entre -360 et 360 avec un pas de 45.

1.

x	-2π	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0
$f(x)$	1	0,71	0	$-0{,}71$	-1	$-0{,}71$	0	0,71	1

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$	1	0,71	0	$-0{,}71$	-1	$-0{,}71$	0	0,71	1

2.



16 g est la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4x$.

1. En vous aidant de la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de g avec un pas de 0,2 entre -2 et 0.
2. Dans chaque cas, dire si le point appartient à la courbe représentative de g. *Justifier*.
   (a) $A(-1{,}8;10{,}44)$ (b) $B(-0{,}6;2{,}76)$ (c) $C(-1{,}2;6{,}26)$ (d) $D(-1;5{,}2)$.
3. Dans chaque cas, dire si le point appartient à la courbe de g. *Justifier*.
   (a) $M(0{,}7;-2{,}3)$ (b) $N(3{,}48;-1{,}81)$ (c) $P(4{,}05;0{,}2)$

1.

x	-2	$-1{,}8$	$-1{,}6$	$-1{,}4$	$-1{,}2$	-1	$-0{,}8$	$-0{,}6$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0
$g(x)$	12	10,44	8,96	7,56	6,24	5	3,84	2,76	1,76	0,84	0

2. (a) $g(x_A) = g(-1{,}8) = 10{,}44 = y_A$, donc $A \in \mathcal{C}_g$.

(b) $g(x_B) = g(-0{,}6) = 2{,}76 = y_B$, donc $B \in \mathcal{C}_g$.

(c) $g(x_C) = g(-1{,}2) = 6{,}24 \neq y_C$, donc $C \notin \mathcal{C}_g$.

(d) $g(x_D) = g(-1) = 5 \neq y_D$, donc $D \notin \mathcal{C}_g$.

3. (a) $g(x_M) = g(0{,}7) = -2{,}31 \neq y_M$, donc $M \notin \mathcal{C}_g$.

(b) $g(x_N) = g(3{,}48) = -1{,}8096 \neq y_N$, donc $N \notin \mathcal{C}_g$.

(c) $g(x_P) = g(4{,}05) = 0{,}2025 \neq y_P$, donc $P \notin \mathcal{C}_g$.