3 Inéquations du premier degré et intervalles

Rappel $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres **réels**.
Un réel est un nombre ayant un nombre fini ou infini de décimales.
Il contient ainsi en particulier :

- $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers **naturels** (entiers **positifs**).
- $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers **relatifs** (entiers négatifs ou positifs).
- $\mathbb{D}$, l'ensemble des **décimaux**, pouvant s'écrire avec un nombre fini de décimales.
- $\mathbb{Q}$, l'ensemble des **rationnels**, pouvant s'écrire sous forme de fractions.

On a finalement :

« est inclus dans »

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Que contient $\mathbb{R}$ de plus que $\mathbb{Q}$? π, $\sqrt{2}$, etc.

I Intervalles

I.1 Définition

Définition 3.1 – Intervalle

Soient a et b deux réels.

- On appelle intervalle **fermé** $[a;b]$ l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$.
- On appelle intervalle **ouvert** $]a;b[$ l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$.

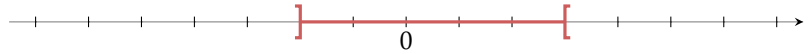
Remarque(s) :

- Les deux crochets ne sont pas nécessairement tous deux fermés ou tous deux ouverts.
  Par exemple, l'intervalle $[1;3[$ est l'ensemble des réels x tels que $1 \leq x < 3$.
- On peut définir un intervalle contenant des valeurs infiniment grandes ou infiniment petites à l'aide des symboles $+\infty$ ("plus l'infini") ou $-\infty$ ("moins l'infini").
  Le crochet est systématiquement **ouvert** lorsque l'on utilise un tel symbole.
  Par exemple, l'intervalle $]-\infty;2]$ est l'ensemble des réels x tels que $x \leq 2$.

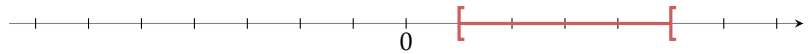
Exemple 3.1 :

Dans chaque cas, dire à quel intervalle appartiennent les réels x vérifiant l'inégalité, puis représenter graphiquement cet intervalle.

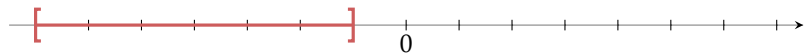
1. $-2 < x < 3$



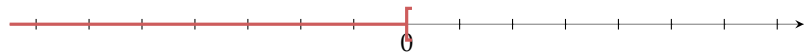
2. $1 \leq x < 5$



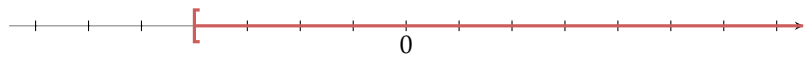
3. $-7 \leq x \leq -1$



4. $x < 0$



5. $x \geq -4$



I.2 Réunion et intersection d'intervalles

Définition 3.2 – Réunion et intersection

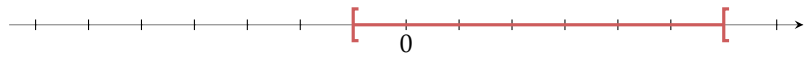
Soient I et J deux intervalles.

- L'**intersection** de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à I **et** à J.
  Elle se note $I \cap J$.
- La **réunion** de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à I **ou** à J.
  Elle se note $I \cup J$.

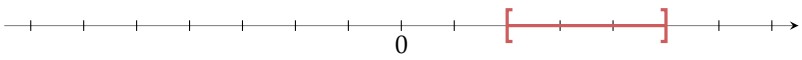
Exemple 3.2 :

Dans chacun des cas, écrire si possible la réunion ou l'intersection sous forme d'un unique intervalle, puis représenter graphiquement l'ensemble.

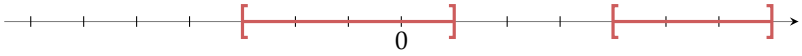
1. $[-1;5] \cup [2;6[= [-1;6[$.



2. $[-1;5] \cap [2;6[= [2;5]$.



3. $[-3;1] \cup [4;7]$. On ne peut pas écrire cet ensemble sous forme d'un seul intervalle car les deux intervalles sont disjoints (leur intersection est vide).



II Résolution d'inéquations

II.1 Manipulation d'inéquations

Propriété 3.1

1. À partir d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente si :
   - on ajoute ou retranche un même nombre à chaque membre.
   - on multiplie ou on divise chaque membre par un même nombre strictement **positif**.
2. Si on multiplie ou divise chaque membre par un même nombre strictement **négatif**, le sens de l'inégalité **change**.

Exemple 3.3 :

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x+1 \geq 3$

$$x+1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$S = [2;+\infty[$.

2. $5x < 6$

$$5x < 6 \Leftrightarrow x < \frac{6}{5}$$

$S = \left]-\infty;\frac{6}{5}\right[$.

3. $-\frac{x+1}{2} > 3$

$$\begin{aligned} -\frac{x+1}{2} > 3 &\Leftrightarrow -(x+1) > 6 \\ &\Leftrightarrow -x-1 > 6 \\ &\Leftrightarrow -x > 7 \\ &\Leftrightarrow x < -7 \end{aligned}$$

$S =]-\infty;-7[$.

4. $4x+7 \leq x+2$

$$\begin{aligned} 4x+7 \leq x+2 &\Leftrightarrow 3x+7 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 3x \leq -5 \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

$S = \left]-\infty;-\frac{5}{3}\right]$.

II.2 Tableaux de signes

Pour résoudre des inéquations plus complexes sous forme de produit et/ou de quotients d'expressions, il devient nécessaire de se donner un outil permettant d'étudier et rendre compte du signe de chaque expression.
On utilise alors un tableau de signes dans lequel on note le signe de chaque expression suivant les valeurs de la variable, puis on applique la règle des signes.

Exemple 3.4 :

Résoudre l'inéquation $(4x+2)(-7x-14) \leq 0$.

$$\begin{aligned} 4x+2 > 0 &\Leftrightarrow 4x > -2 \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7x-14 > 0 &\Leftrightarrow -7x > 14 \\ &\Leftrightarrow x < -2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$-7x+14$		$+$	0	$-$		$-$	
$(4x+2)(-7x-14)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Grâce au tableau ci-dessus, on voit que $(4x+2)(-7x-14) \leq 0$ si $x \in]-\infty;-2]$ ou si $x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.
Autrement dit l'ensemble des solutions est $S =]-\infty;-2] \cup \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Exemple 3.5 :

Résoudre l'inéquation $\frac{3x+6}{x-5} \geq 0$.

$$\begin{aligned} 3x+6>0 &\Leftrightarrow 3x>-6 \\ &\Leftrightarrow x>-2 \end{aligned}$$

$$x-5>0 \Leftrightarrow x>5$$

Nous pouvons dresser le tableau de signes comme dans l'exemple précédent, mais nous devons faire attention au fait que l'expression $x-5$ est au dénominateur, et qu'on ne peut pas diviser par 0.
On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$3x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3x+6}{x-5}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi :

$$S =]-\infty;-2] \cup]5;+\infty[$$

Le crochet est fermé en -2 car -2 est bien une solution de l'inéquation puisque $\frac{3x+6}{x-5}$ vaut 0 si on remplace x par -2.
En revanche, le crochet est ouvert en 5, car 5 n'est pas solution, il s'agit d'une valeur interdite ! On l'indique à l'aide d'une double barre.