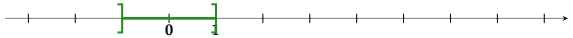
## A Intervalles

**1** Compléter le tableau suivant :

| Inégalité | Intervalle | Représentation graphique |
|---|---|---|
| $0 < x \leq 5$ | $x \in ]0;5]$ | |
| $\boxed{-3 < x < 7}$ | $x \in ]-3;7[$ | |
| $3 \leq x$ | $\boxed{x \in ]3;+\infty]}$ | |
| $\boxed{-1 < x \leq 1}$ | $\boxed{x \in ]-1;1]}$ |  |
| $\boxed{x \geq 2}$ | $\boxed{x \in [2;+\infty[}$ | |

**2** Compléter avec $\in$ ou $\notin$.

1. $1 \notin ]1;2]$.
2. $-2 \in [-3;+\infty[$
3. $\sqrt{2} \in ]-1;7[$
4. $\frac{1}{9} \notin \left[\frac{1}{8};2\right[$
5. $4 \notin ]-4;4[$
6. $5 \in ]-1;+\infty[$
7. $\frac{1}{10} \in ]0{,}001;1[$
8. $-2500 \in ]-\infty;-2499[$

**3** Dans chaque cas, écrire sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles le plus petit ensemble auquel appartient $x$ :

1. $x \leq 2$ ou $x \geq 3$.
2. $x < 2$ ou $x \leq 4$
3. $x \geq -1$ ou $x < -3$.
4. $x > 4$ ou $x > 1$

1. $x \in \boxed{]-\infty;2] \cup [3;+\infty[}$
2. $x \in ]-\infty;2[ \cup ]-\infty;4] = \boxed{]-\infty;4]}$
3. $x \in \boxed{]-\infty;-3[ \cup [-1;+\infty[}$
4. $x \in ]4;+\infty[ \cup ]1;+\infty[ = \boxed{]1;+\infty[}$.

**4** Écrire chaque assertion sous forme d'intersection puis déterminer l'ensemble des réels $x$ qui appartiennent à cette intersection :

1. $x < 2$ et $x > -6$
2. $x \geq -4$ et $x \geq 7$
3. $x \leq 5$ et $x > -8$
4. $x > -3$ et $x \leq -2$

1. $x \in ]-\infty;2[ \cap ]-6;+\infty[ = \boxed{]-6;2[}$.
2. $x \in [-4;+\infty[ \cap [7;+\infty[ = \boxed{[7;+\infty[}$.
3. $]-\infty;5] \cap ]-8;+\infty[ = \boxed{]-8;5]}$
4. $x \in ]-3;+\infty[ \cap ]-\infty;-2] = \boxed{]-3;-2]}$.

## B Inequations

**5** Résoudre les inéquations suivantes.

1. $x - 5 \leq 1$.

$x - 5 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 6$.
Donc $\boxed{S = ]-\infty;6]}$.

2. $4x + 2 \geq 1$.

$$\begin{aligned} 4x + 2 \geq 1 &\Leftrightarrow 4x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S = [-\frac{1}{4};+\infty[}$.

3. $-\frac{1}{2}x + 1 < 4$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x + 1 < 4 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x < 3 \\ &\Leftrightarrow x > 3 \times (-2) \\ &\Leftrightarrow x > -6 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S = ]-6;+\infty[}$.

4. $-8x + 2 \geq 2x + 1$.

$$\begin{aligned} -8x + 2 \geq 2x + 1 &\Leftrightarrow -8x - 2x \geq 1 - 2 \\ &\Leftrightarrow -10x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S = ]-\infty; \frac{1}{10}]}$.

**6** Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} < \frac{2x}{3} - \frac{1}{2}$
2. $\frac{x-1}{4} < \frac{2x-3}{2} + 5$
3. $\frac{x-1}{2} > \frac{2x-2}{4}$
4. $\frac{3x-1}{5} - \frac{13}{2} \geq \frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6}$
5. $\frac{2x}{5} - \frac{2x-17}{5} < 10 - \frac{2x-6}{2}$

1.

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} - \frac{1}{3} < \frac{2x}{3} - \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{2x}{3} < -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{6} - \frac{4x}{6} < -\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\\ &\Leftrightarrow -\frac{x}{6} < -\frac{1}{6}\\ &\Leftrightarrow x > -\frac{1}{6} \times (-6)\\ &\Leftrightarrow x > 1\end{aligned}$$

$$\boxed{S = ]1; +\infty[}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{4} < \frac{2x-3}{2} + 5 &\Leftrightarrow \frac{x-1}{4} - \frac{2(2x-3)}{4} - \frac{20}{4} < 0\\ &\Leftrightarrow \frac{x-1-4x+6-20}{4} < 0\\ &\Leftrightarrow -3x - 15 < 0\\ &\Leftrightarrow -3x < 15\\ &\Leftrightarrow x > -\frac{15}{3}\\ &\Leftrightarrow x > -5\end{aligned}$$

$$S = ]-5; +\infty[$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{2} > \frac{2x-2}{4} &\Leftrightarrow \frac{2x-2}{4} - \frac{2x-2}{4} > 0\\ &\Leftrightarrow 0 > 0\end{aligned}$$

Ce qui est impossible, donc $\boxed{S = \emptyset}$.

4.

$$\begin{aligned}\frac{3x-1}{5} - \frac{13}{2} \geq \frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6} &\Leftrightarrow \frac{6(3x-1) - 13 \times 15}{30} \geq \frac{10 \times 7x - 5 \times (11x+33)}{30}\\ &\Leftrightarrow 6(3x-1) - 13 \times 15 \geq 10 \times 7x - 5 \times (11x+33)\\ &\Leftrightarrow 18x - 6 - 195 \geq 70x - 55x - 165\\ &\Leftrightarrow 18x - 15x \geq -165 + 201\\ &\Leftrightarrow 3x \geq 36\\ &\Leftrightarrow x \geq 12\end{aligned}$$

$$\boxed{S = [12; +\infty[}$$

5.

$$\begin{aligned}\frac{2x}{5} - \frac{2x-17}{5} < 10 - \frac{2x-6}{2} &\Leftrightarrow \frac{2x}{5} - \frac{2x}{5} + \frac{17}{5} < \frac{20-2x+6}{2}\\ &\Leftrightarrow \frac{17}{5} < \frac{26-2x}{2}\\ &\Leftrightarrow \frac{34}{10} < \frac{130-10x}{10}\\ &\Leftrightarrow 34 < 130 - 10x\\ &\Leftrightarrow 10x < 96\\ &\Leftrightarrow x < \frac{96}{10}\\ &\Leftrightarrow x < \frac{48}{5}\end{aligned}$$

$$\boxed{S = \left]-\infty; \frac{48}{5}\right[}$$

**7** Deux entreprises de transport proposent les tarifs suivants :

- 110 € au départ puis 1,75 €/km.
- 125 € au départ puis 1,50 €/km.

On vous demande à partir de quel kilométrage le tarif du second transporteur est plus avantageux ?

1. Modéliser le problème.
2. Répondre à la question de l'énoncé.

1. Soit $x$ le nombre de kilomètres parcourus.
   Le prix de la première entreprise est modélisé par : $110 + 1{,}75x$
   Le prix de la seconde entreprise est modélisé par : $125 + 1{,}5x$. Pour répondre au problème, il faut résoudre : $125 + 1{,}5x < 110 + 1{,}75x$.

2.

$$\begin{aligned} 125+1{,}5x<110+1{,}75x &\Leftrightarrow 1{,}5x-1{,}75x<110-125 \\ &\Leftrightarrow -0{,}25x<-15 \\ &\Leftrightarrow x>\frac{-15}{-0{,}25} \\ &\Leftrightarrow x>60 \end{aligned}$$

Donc le tarif du second transporteur est plus avantageux à partir de 60 km.

**8** Un cactus est planté alors qu'ils mesure 3 cm. Soit $n$ le nombre d'années à partir du moment où le cactus est planté. On sait que ce cactus grandit de 0,6 cm par an. On cherche le nombre d'années qu'il faudra à ce cactus pour atteindre la taille de 231 cm.

1. Modéliser le problème.
2. Résoudre le problème.

1. On cherche $n$ tel que : $3+0{,}6n\geq 231$.
2.

$$\begin{aligned} 3+0{,}6n\geq 231 &\Leftrightarrow 0{,}6n\geq 231-3 \\ &\Leftrightarrow n\geq\frac{228}{0{,}6} \\ &\Leftrightarrow n\geq 380 \end{aligned}$$

Donc il faudra 380 années à ce cactus pour atteindre la taille de 231 cm.

**9** Résoudre les inéquations suivantes.

1. $(x+1)(x+2)>0$
2. $(1-x)(x+3)\geq 0$
3. $x(2x+1)<0$
4. $(6x+18)(4-x)\leq 0$
5. $\frac{2+x}{3x-9}\leq 0$
6. $\frac{\frac{1}{2}x+4}{3x-1}>0$
7. $\frac{6x+1}{x}\geq 0$
8. $\frac{2x-2}{7x+1}<0$

1.

$x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ $\qquad$ $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x+1)(x+2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi : $\boxed{S=]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[}$.

2.

$1-x>0 \Leftrightarrow -x>-1$
$\Leftrightarrow x<1$ $\qquad$ $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(1-x)(x+3)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi : $\boxed{S=[-3;1]}$.

3.

$$\begin{aligned} 2x+1>0 &\Leftrightarrow 2x>-1 \\ &\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x(2x+1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi : $\boxed{S=\left]-\frac{1}{2};0\right[}$.

4.

$6x+18>0 \Leftrightarrow 6x>-18$
$\Leftrightarrow x>-3$ $\qquad$ $4-x>0 \Leftrightarrow -x>-4$
$\Leftrightarrow x<4$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $6x+18$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $4-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(6x+18)(4-x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Ainsi : $\boxed{S = ]-\infty;-3] \cup [4;+\infty[}$.

5.

$$2+x>0 \Leftrightarrow x>-2 \qquad 3x-9>0 \Leftrightarrow 3x>9 \Leftrightarrow x>3$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $3x-9$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\frac{2+x}{3x-9}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

Ainsi : $\boxed{S = [-2;3[}$.

6.

$$\frac{1}{2}x+4>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x>-4 \Leftrightarrow x>-8 \qquad 3x-1>0 \Leftrightarrow 3x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-8$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}x+4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $3x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\frac{\frac{1}{2}x+4}{3x-1}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

Ainsi : $\boxed{S = ]-\infty;-8[ \cup \left]\frac{1}{3};+\infty\right[}$.

7.

$$6x+1>0 \Leftrightarrow 6x>-1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{6}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{6}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $6x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\frac{6x+1}{x}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

Ainsi : $\boxed{S = \left]-\infty;-\frac{1}{6}\right] \cup ]0;+\infty[}$.

8.

$$2x-2>0 \Leftrightarrow 2x>2 \Leftrightarrow x>1 \qquad 7x+1>0 \Leftrightarrow 7x>-1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{7}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{7}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $7x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{2x-2}{7x+1}$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi : $\boxed{S = \left]-\frac{1}{7};1\right[}$.

**10** Résoudre les inéquations suivantes.

1. $(x+5)(2-x)(x-1)^2<0$
2. $x^4>-x^2$
3. $(x-2)^6(x-5)<0$
4. $\frac{(x-4)(5-2x)}{2-3x} \geq 0$
5. $(x+3)(x-2)^2(x-5)^3<0$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)^2 \geq 0$.
   Autrement dit, on sait que quelle que soit la valeur de $x$, $(x-1)^2$ est supérieur ou égal à zéro en tant que carré.
   Ce facteur peut tout de même être égal à zéro, lorsque $x-1$ s'annule.

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

On étudie les deux autres facteurs.

- $x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$.
- $$2-x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 2$$

Ainsi :

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+5$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2-x$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(x-1)^2$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x+5)(2-x)(x-1)^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

2.

$$x^4 > -x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2+1\right) > 0$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ , $x^2 \geq 0$ et $x^2+1 > 0$ .
Ainsi, $x^2(x^2+1) > 0$ pour tout $x \neq 0$ .
Donc $\boxed{S = ]-\infty;0[\cup]0;+\infty[} = \mathbb{R}^*$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-2)^6 \geq 0$.
$(x-2)^6 = 0$ si et seulement si $x-2=0$.
Or $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.
$x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.
Ainsi :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-2)^6$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-5$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x-2)^6(x-5)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc $\boxed{S = ]-\infty;2[\cup]2;5[} = ]-\infty;5[\setminus\{2\}$.

4. $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$.

$$5-2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -5$$
$$\Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

$$2-3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -2$$
$$\Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

Ainsi :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{3}$ | | $\frac{5}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-4$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $5-2x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $2-3x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $\frac{(x-4)(5-2x)}{2-3x}$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc $\boxed{S = \left]\frac{2}{3};\frac{5}{2}\right]\cup[4;+\infty[}$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-2)^2 \geq 0$, et $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.
Concernant le signe de $(x-5)^3$ : lorsqu'on élève un nombre au cube, le résultat est négatif si le nombre est négatif, et positif si le nombre est positif.

$$x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$$

$$x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$$

Ainsi :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $(x-2)^2$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x-5)^3$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x+3)(x-2)^2(x-5)^3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc $\boxed{S = ]-3;2[\cup]2;5[}$.