2 Repérage dans le plan

I Repère du plan et coordonnées d'un point

I.1 Définition

Définition 2.1

Un repère $(O;I,J)$ du plan est constitué de deux droites graduées (ou axes) de même origine O, qui est l'**origine** du repère.
L'axe des **abscisses** *(resp.* ***ordonnées****)* est la droite (OI) *(resp.* (OJ)*)*, orientée dans le sens de O vers I *(resp. J)*, et a pour unité de longueur OI *(resp.* OJ*)*.
Dans un repère, tout point M est repéré par son abscisse x_M et son ordonnée y_M.
x_M et y_M sont appelées **coordonnées** du point M dans ce repère.
On note :

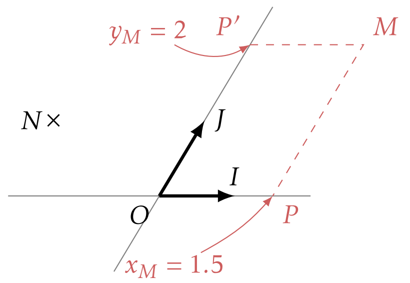
$$M\left(x_M;y_M\right)$$

I.2 Méthode : *lecture des coordonnées d'un point*

Pour lire les coordonnées d'un point M, on procède ainsi :

1. On trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par M. Elle coupe l'axe (OI) en un point P. L'abscisse x_M du point M est l'abscisse de P sur (OI).
2. On trace la parallèle à l'axe des abscisses passant par M. Elle coupe l'axe (OJ) en un point P'. L'ordonnée y_M du point M est l'abscisse de P' sur (OJ).

Exemple 2.1 :



Les coordonnées du point M sont : **(1.5;2)**.
Quelles sont les coordonnées du point N ?
$N(-2;1)$

Définition 2.2

On dit qu'un repère $(O;I,J)$ est **orthogonal** si $(OI)\perp(OJ)$.
Si de plus, $OI = OJ$ (i.e les deux axes ont la même unité), on dit alors que $(O;I,J)$ est **orthonormé**.
Si un repère n'est ni orthonormé, ni orthogonal, on dit qu'il est **quelconque**.

Exercices : A

II Milieu d'un segment

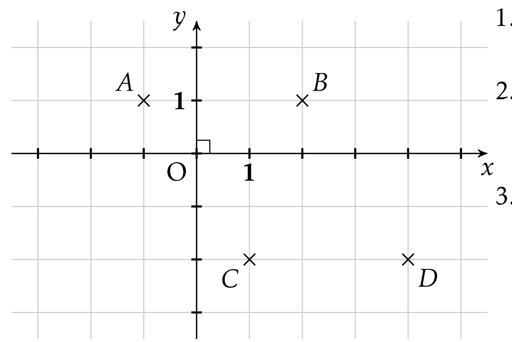
Exercices : B.1

Propriété 2.1 – Coordonnées du milieu d'un segment

Dans tout repère $(O;I,J)$ les coordonnées du point M, milieu du segment $[AB]$ sont :

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Exemple 2.2 :



1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D.
2. Déterminer les coordonnées de I_1 milieu du segment $[AD]$ et de I_2 milieu du segment $[BC]$.
3. En déduire la nature du quadrilatère ABDC.

1. $A(-1;1)$, $B(2;1)$, $C(1;-2)$, et $D(4;-2)$.
2.
   - $x_{I_1} = \frac{x_A+x_D}{2} = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$; $y_{I_1} = \frac{y_A+y_D}{2} = \frac{1+1}{2} = -\frac{1}{2}$. Donc $I_1(\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$.
   - $x_{I_2} = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$; $y_{I_2} = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$. Donc $I_2(\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$.
3. I_1 et I_2 ont les mêmes coordonnées donc les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu, donc ABDC est un parallélogramme.

Exercices : B

III Distance entre deux points

Exercices : C.1

Propriété 2.2 – Distance entre deux points dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, la distance entre deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple 2.3 :

Soient $A(3;6)$, $B(1;4)$ et $C(4;1)$.

1. Sous quelle condition le triangle ABC est-il rectangle en B ?
   $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (réciproque du théorème de Pythagore).
2. Démontrer que ABC est rectangle en B.
   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
   $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-3)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$.
   Ainsi : $AB^2 + BC^2 = 8 + 18 = 26 = AC^2$.
   Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Exercices : C

IV Applications

IV.1 Alignement de points

Propriété 2.3 – Points alignés

Soient A, B et C trois points distincts du plan.

A, B et C sont alignés **si et seulement si** $AC = AB + BC$

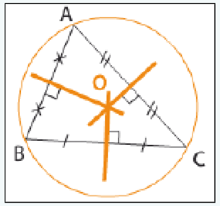
Exemple 2.4 :

Démontrer que les points $A(-2;-3)$, $B(3;0)$ et $C(18;9)$ sont alignés.
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3-(-2))^2 + (0-(-3))^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.
$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(18-3)^2 + (9-0)^2} = \sqrt{15^2 + 9^2} = \sqrt{306} = 3\sqrt{34}$.
$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(18-(-2))^2 + (9-(-3))^2} = \sqrt{20^2 + 12^2} = \sqrt{544} = 4\sqrt{34}$.
Ainsi : $AB + BC = \sqrt{34} + 3\sqrt{34} = 4\sqrt{34} = AC$.
Donc les points A, B et C sont alignés.

IV.2 Médiatrices et cercle circonscrit

Propriété 2.4 – Cercle circonscrit

Les **médiatrices** des côtés d'un triangle sont concourantes en O, *centre de son cercle* ***circonscrit***.



Rappel La médiatrice d'un segment $[AB]$ est la droite qui le coupe **perpendiculairement** en son **milieu**. C'est aussi l'ensemble des points situés à égale distance de A et de B.

Exemple 2.5 :

Dans un repère orthonormé, soient les points :
$O(1;2)$; $A(1;4)$; $B(3;2)$; $C\left(2;2-\sqrt{3}\right)$.

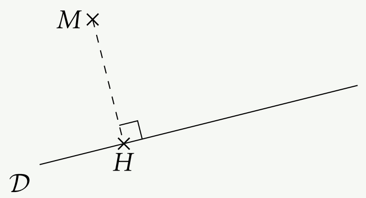
1. Démontrer que O est le point d'intersection des médiatrices de [AB], [BC] et [AC].
   Après calculs, on trouve $AO = BO = 2$. Donc O appartient à la médiatrice de [AB].
   $CO = BO$, donc O appartient à la médiatrice de [BC].
   $CO = AO$, donc O appartient à la médiatrice de [AC].
   Donc O est est le point d'intersection des trois médiatrices de ABC.
2. Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?
   On en déduit que les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon $AO = BO = CO$.
3. En déduire l'aire du cercle passant par les points A, B et C. *On considère le mètre comme unité.*
   On en déduit que le cercle passant par A, B et C a pour rayon 2 m. Soit $\mathcal{A}$ son aire.
   On a : $\mathcal{A} = \pi \times r^2 = \pi \times 2^2 = 4\pi \approx 12.57 m^2$

IV.3 Projeté orthogonal, aire d'un triangle

a) Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition 2.3 – Projeté orthogonal

Soit $\mathcal{D}$ une droite et M un point tel que $M \notin \mathcal{D}$.
On dit que H est le **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{D}$ lorsque $H \in \mathcal{D}$ et $(MH) \perp \mathcal{D}$.



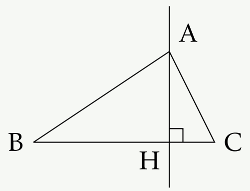
Remarque(s) :

- Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite $\mathcal{D}$ est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de M.
  MH est alors la distance entre M et la droite $\mathcal{D}$.

b) Hauteur et aire d'un triangle

Définition 2.4 – Hauteur

Dans un triangle ABC, la hauteur issue de A est la droite (AH), où H est le projeté orthogonal de A sur (BC).



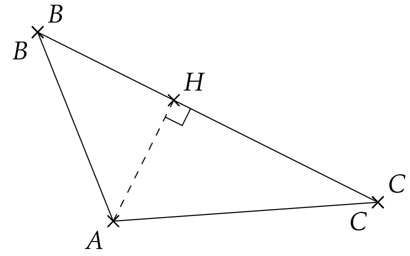
N.B : H s'appelle aussi le **pied** de la hauteur issue de A, et $[BC]$ est alors appelé **base** du triangle.

Rappel La hauteur d'un triangle permet de calculer son aire $\mathcal{A}$. Initialement, la hauteur issue de A est une droite, mais on emploie aussi ce terme pour désigner la longueur du segment $[AH]$. On a alors :

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Exemple 2.6 :

On cherche à calculer l'aire du triangle ABC ci-dessous.
On suppose que l'on est dans un repère orthonormé dans lequel on a $A(-2;-1)$, $B(-3;1,5)$ et $C(1,5;-0,75)$.



1. Placer le point H, pied de la hauteur issue de A.
2. On suppose que le point H a pour coordonnées $H(-1,2;0,6)$. Calculer l'aire du triangle ABC.
   Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.
   $\mathcal{A} = \frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2} = \frac{BC\times AH}{2}$.
   Or : $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1,5-(-3))^2 + (-0,75-1,5)^2} = \sqrt{4,5^2 + (-2,25)^2} = \sqrt{25,3125}$
   $AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \sqrt{(-1,2-(-2))^2 + (0,6-(-1))^2} = \sqrt{0,8^2 + 1,6^2} = \sqrt{3,2}$.
   Ainsi : $\boxed{\mathcal{A} = \frac{\sqrt{25,3125}\times\sqrt{3,2}}{2} = 4,5}$

Remarque(s) :

- L'aire obtenue est exprimés en unités d'aire, que l'on n'indique pas en mathématiques. Celle-ci est à déterminer dans un contexte plus concret (e.g (*exempli gratia*) physique, architecture etc). Si par exemple toutes les longueurs étaient exprimées en mètres, nous aurions une surface exprimés en m^2.

Exercices : D