A Coordonnées d'un point

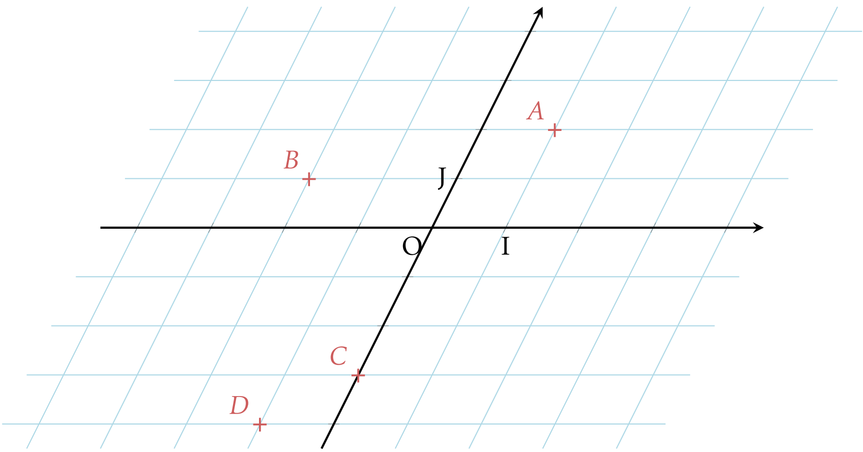
A.1 Questions de cours

1

1. Tracer un repère quelconque, un repère orthogonal et un repère orthonormé.
2. Dans chacun de ces repères, placer les points $A(1;1)$, $B(2;-1)$ et $C(-3;2)$.

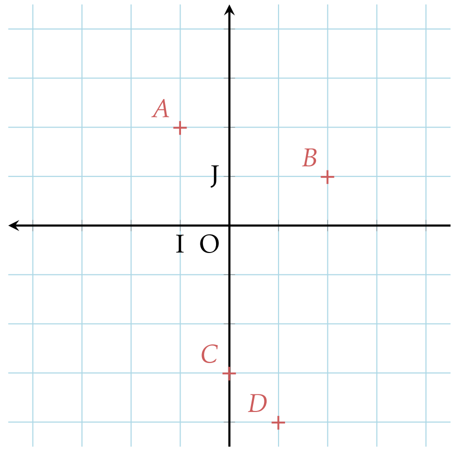
A.2 Faire ses gammes

2 Dans le repère ci-dessous, déterminer les coordonnées de chaque point.



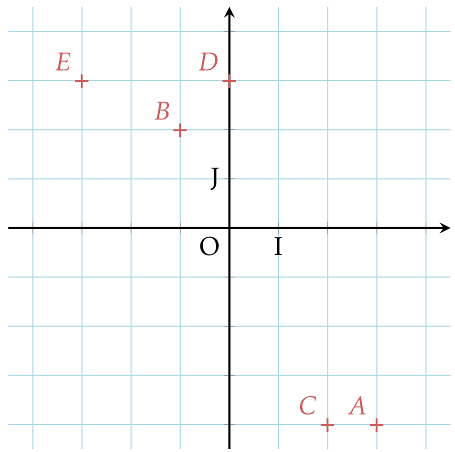
$A(1;2)$, $B(-2;1)$, $C(0;-3)$ et $D(-1;-4)$.

3 Dans le repère ci-dessous, déterminer les coordonnées de chaque point.



$A(1;2)$, $B(-2;1)$, $C(0;-3)$ et $D(-1;-4)$.

4 Dans le repère ci-dessous, déterminer les coordonnées de chaque point.



$A(3;-4)$, $B(-1;2)$, $C(2;-4)$, $D(0;3)$ et $E(-3;3)$.

B Milieu d'un segment

B.1 Découverte

5 Milieu d'un segment

1. Dans un repère $(O;I,J)$, placer les points $A(2;3)$, $B(6;1)$ et $C(1;-3)$.

2. (a) Lire les coordonnées des points M, N et P, milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
   (b) Quelle relation existe-t-il entre les coordonnées de M et celles de A et B? Vérifier qu'il existe une relation similaire pour les points N et P.
3. Déterminer les coordonnées du point Z, milieu du segment $[UV]$, avec $U(54;-9)$ et $V(298;79)$.

1.
2. (a) On lit $M(4;2)$, $N\left(\frac{3}{2};0\right)$ et $P\left(\frac{7}{2};-1\right)$.
   (b) On remarque que $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$.
   De même : $x_N = \frac{x_A+x_C}{2}$ et $y_N = \frac{y_A+y_C}{2}$.
   Et enfin : $x_P = \frac{x_B+x_C}{2}$ et $y_P = \frac{y_B+y_C}{2}$.
3. En appliquant la même formule on a :

$$x_Z = \frac{x_U + x_V}{2} = \frac{54+298}{2} = \frac{352}{2} = 176$$

$$y_Z = \frac{y_U + y_V}{2} = \frac{-9+79}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

Donc $Z(176;35)$.

B.2 Faire ses gammes

6 Dans chacun des cas, placer les points dans un repère orthonormé, puis calculer les coordonnées du milieu I du segment formé par les deux points indiqués.
On pourra vérifier la cohérence entre les résultats obtenus et le graphique.

1. $A(-4;3)$ et $F(6;6)$.
   $I\left(\frac{x_A+x_F}{2};\frac{y_A+y_F}{2}\right)$, ce qui donne finalement $I\left(1;\frac{9}{2}\right)$
2. $H(5;1)$ et $F(-2;5)$.
   $I\left(\frac{x_H+x_F}{2};\frac{y_H+y_F}{2}\right)$, ce qui donne finalement $I\left(\frac{3}{2};3\right)$
3. $H(6;-3)$ et $B(3;-5)$.
   $I\left(\frac{x_H+x_B}{2};\frac{y_H+y_B}{2}\right)$, ce qui donne finalement $I\left(\frac{9}{2};-4\right)$
4. $C(-1;-6)$ et $B(-6;-6)$.
   $I\left(\frac{x_C+x_B}{2};\frac{y_C+y_B}{2}\right)$, ce qui donne finalement $I\left(-\frac{7}{2};-6\right)$
5. $H(4;-3)$ et $B(6;1)$.
   $I\left(\frac{x_H+x_B}{2};\frac{y_H+y_B}{2}\right)$, ce qui donne finalement $I(5;-1)$

7 Dans chacun des cas, placer les points dans un repère orthonormé, puis calculer les coordonnées du milieu I du segment formé par les deux points indiqués.
On pourra vérifier la cohérence entre les résultats obtenus et le graphique.

1. $C(-2;-6)$ et $B(0;2)$.
   $I\left(\frac{x_C+x_B}{2};\frac{y_C+y_B}{2}\right)$, ce qui donne finalement $I(-1;-2)$
2. $H(4;-5)$ et $B(-4;4)$.
   $I\left(\frac{x_H+x_B}{2};\frac{y_H+y_B}{2}\right)$, ce qui donne finalement $I\left(0;-\frac{1}{2}\right)$
3. $H(5;-2)$ et $D(-5;5)$.
   $I\left(\frac{x_H+x_D}{2};\frac{y_H+y_D}{2}\right)$, ce qui donne finalement $I\left(0;\frac{3}{2}\right)$
4. $C(-1;5)$ et $M(5;2)$.
   $I\left(\frac{x_C+x_M}{2};\frac{y_C+y_M}{2}\right)$, ce qui donne finalement $I\left(2;\frac{7}{2}\right)$
5. $C(0;2)$ et $F(4;-3)$.
   $I\left(\frac{x_C+x_F}{2};\frac{y_C+y_F}{2}\right)$, ce qui donne finalement $I\left(2;-\frac{1}{2}\right)$

B.3 Exercices d'entraînement

8 Dans chacun des cas, déterminer si le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

1. $A(-3;2)$, $B(-4;-2)$, $C(1;-5)$ et $D(2;-1)$.
   ABCD est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.
   Soient I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$.

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1 \qquad y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2}$$

Donc $I\left(-1;-\frac{3}{2}\right)$.

$$x_J = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1 \qquad y_J = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-2-1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Donc $J\left(-1;-\frac{3}{2}\right)$.
Les points I et J ont les mêmes coordonnées, donc les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.
On en déduit que $ABCD$ est un parallélogramme.

2. $A(-4;2)$, $B(-3;-4)$, $C(3;-5)$ et $D(2;-1)$.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.
Soient I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$.

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2} \qquad y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2}$$

Donc $I\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

$$x_J = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2} \qquad y_J = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-4-1}{2} = -\frac{5}{2}$$

Donc $J\left(-\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$.
Les points I et J n'ont pas les mêmes coordonnées, donc les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ne se coupent pas en leur milieu.
On en déduit que $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

3. $A(5;4)$, $B(-5;0)$, $C(-14;-12)$ et $D(-4;-10)$.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.
Soient I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$.

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{5-14}{2} = -\frac{9}{2} \qquad y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4-12}{2} = -4$$

Donc $I\left(-\frac{9}{2};-4\right)$.

$$x_J = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{-5-4}{2} = -\frac{9}{2} \qquad y_J = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{0-10}{2} = -5$$

Donc $J\left(-\frac{9}{2};-5\right)$.
Les points I et J n'ont pas les mêmes coordonnées, donc les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ne se coupent pas en leur milieu.
On en déduit que $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

4. $A(-8;-14)$, $B(2;-4)$, $C(14;0)$ et $D(4;-10)$.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.
Soient I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$.

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-8+14}{2} = 3 \qquad y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

Donc $I(3;-7)$.

$$x_J = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$y_J = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-4-10}{2} = -7$$

Donc $J(3;-7)$.
Les points I et J ont les mêmes coordonnées, donc les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.
On en déduit que $ABCD$ est un parallélogramme.

C Distance entre deux points

C.1 Découverte

9 Distance entre deux points

1. Dans un repère **orthonormé** $(O;I,J)$, placer les points $A(1;1)$, $B(5;4)$ et $C(5;1)$.
2. Quelle est la distance AC ? Exprimer celle-ci en fonction de x_A et x_B, **abscisses** des points A et B.
3. Quelle est la distance BC ? Exprimer celle-ci en fonction de y_A et y_B, **ordonnées** des points A et B.
4. (a) Quelle est la nature de ABC ? Cela aurait-il été le cas dans un repère quelconque ?
   (b) En déduire la distance AB, ainsi que son expression en fonction de x_A, x_B, y_A et y_B.

1.
2. $AC = 4$. On remarque que $4 = x_C - x_A = x_B - x_A$.
3. $BC = 3$. On remarque que $BC = y_B - y_C = y_B - y_A$.
4. (a) ABC est un triangle rectangle. Cela est le cas uniquement car les axes sont perpendiculaires, donc ce n'aurait pas été le cas dans un repère quelconque.
   (b) Dans le triangle ABC, on utilise le théorème de Pythagore.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

   (c) On en déduit que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.

C.2 Faire ses gammes

10 Soient $A(1;4)$, $B(-3;2)$ et $C(-6;-7)$ dans un repère orthonormé $(O;I,J)$.
Placer les points A, B et C, puis déterminer la distance entre chaque point.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-6-(-3))^2 + (-7-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-6-1)^2 + (-7-4)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-11)^2} = \sqrt{170}$.

C.3 Exercices d'entraînement

11 Soient $A(10;-4)$, $B(10;6)$ et $C(6;-2)$. Démontrer que ABC est rectangle en C.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(10-10)^2 + (6-(-4))^2} = \sqrt{0^2 + 10^2} = \sqrt{100} = 10$.

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(6-10)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(6-10)^2 + (-2-(-4))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

On remarque que le plus grand côté est $[AB]$.
Or : $AC^2 + BC^2 = (4\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 80 + 20 = 100 = AB^2$.
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en C.

12 Soient $A(-4;-1)$, $B(-5;1)$ et $C(0;1)$. Démontrer que ABC est rectangle en A.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-5-(-4))^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0-(-5))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$.

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0-(-4))^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

On remarque que le plus grand côté est $[BC]$.
Or : $AC^2 + AB^2 = (\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 5 + 20 = 25 = BC^2$.
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

D Applications

D.1 Exercices d'entraînement

13 Soient $A(-3;2)$, $B(4;-2)$ et $C(11;-6)$.

1. Placer les points dans un repère orthonormé.
2. Déterminer si les points A, B et C sont alignés.

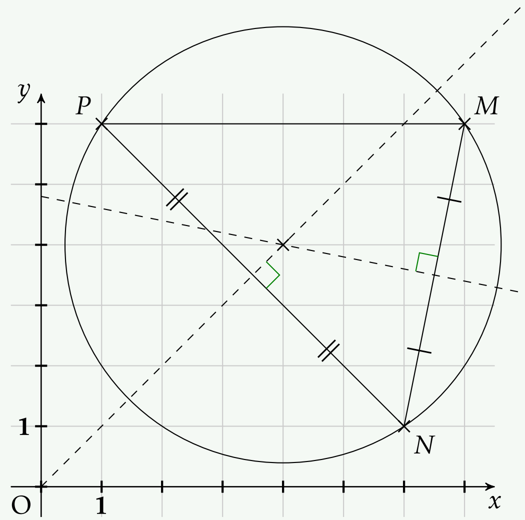
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-(-3))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{7^2 + (-4)^2} = \sqrt{65}$.
$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(11-4)^2 + (-6-(-2))^2} = \sqrt{7^2 + (-4)^2} = \sqrt{65}$.
$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(11-(-3))^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{14^2 + (-8)^2} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65}$.
On remarque que le plus grand segment est $[AC]$.
Or : $BC + AB = (\sqrt{65}) + (\sqrt{65}) = \sqrt{65} + \sqrt{65} = 2\sqrt{65} = AC$.
Donc les points A, B et C sont alignés.

14 Soient $A(15;25)$, $B(20;18)$ et $C(17;22)$.
Déterminer si les points A, B et C sont alignés.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(20-15)^2 + (18-25)^2} = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{74}$.
$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(17-20)^2 + (22-18)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.
$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(17-15)^2 + (22-25)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.
On remarque que le plus grand segment est $[AB]$.
Or : $AC + BC = 5 + \sqrt{13} = \sqrt{13} + 5$
$AB = \sqrt{74}$.
$AB \neq AC + BC$, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

15 Soient $M(7;6)$,$N(6;1)$et $P(1;6)$ trois points.
On cherche à calculer l'aire du disque qui passe par ces 3 points.

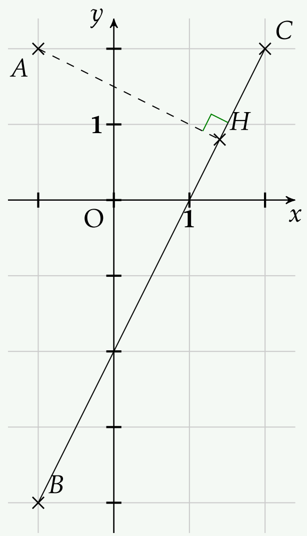
1. Placer ces trois points dans un repère orthonormé.
2. Par construction, placer le centre du cercle passant par M, N et P.
3. Comment s'appelle ce cercle ?
4. Vérifier par le calcul que le centre du cercle a pour coordonnées $(4;4)$.
5. En déduire l'aire du disque passant par M, N et P.



On trace les médiatrices d'au moins deux des côtés du triangle. Le centre du **cercle circonscrit** du triangle MNP (i.e le cercle passant par les trois sommets du triangle) se trouve à l'intersection des médiatrices.
Pour vérifier les coordonnées du centre par le calcul, on montre que les trois sommets en sont à égale distance.
Nommons C le point de coordonnées $(4;4)$.
On montre que $MC = NC = PC = \sqrt{13}$.
On en déduit que C est le centre du cercle circonscrit à MNP.
Soit $\mathcal{A}$ l'aire du disque passant par M, N et P.
$\mathcal{A} = \pi \times r^2 = \pi \times MC^2 = 13\pi$.

16 Soient $A(-1;2)$, $B(-1;-4)$ et $C(2;2)$.

1. Placer les point A, B et C dans un repère orthonormé.
2. On cherche à calculer la distance entre le point A et la droite (BC).
   (a) Placer le point H, projeté orthogonal de A sur (BC). *Laisser les traits de construction apparents.*
   (b) On suppose que le point H a pour coordonnées $H(\frac{7}{5};0,8)$.
   En déduire la distance entre A et (BC).



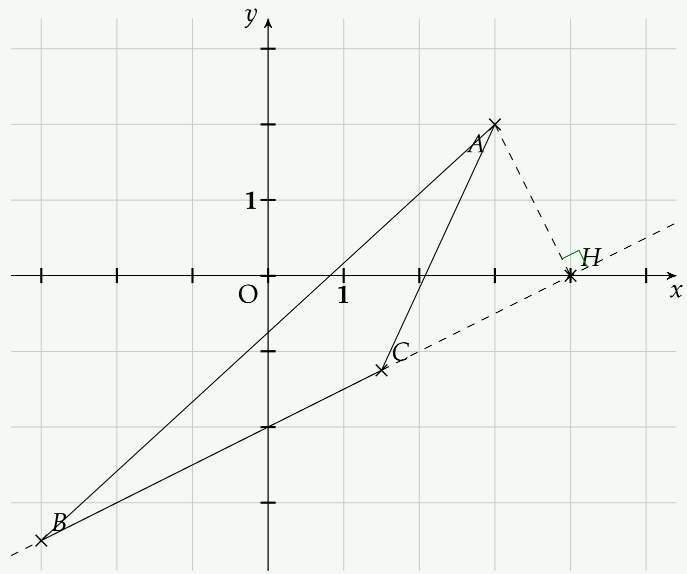
$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \sqrt{(\frac{7}{5} - (-1))^2 + (\frac{4}{5} - 2)^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(-\frac{6}{5}\right)^2} = \boxed{\sqrt{\frac{36}{5}}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

17 On cherche à calculer l'aire du triangle ABC ci-dessous.
On suppose que l'on est dans un repère orthonormé dans lequel on a $A(3;2)$, $B(-3;-3{,}5)$ et $C(1{,}5;-1{,}25)$.

1. Tracer le triangle ABC dans un repère orthonormé.

2. Placer le point H, projeté orthogonal de A sur (BC).

3. On suppose que le point H a pour coordonnées $H(4;0)$. Calculer l'aire du triangle ABC.



Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.
$\mathcal{A} = \frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2} = \frac{BC\times AH}{2}$.
Or : $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1{,}5 - (-3))^2 + (-1{,}25 - (-3{,}5))^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 2{,}25^2} = \sqrt{25{,}3125}$
$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \sqrt{(4-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.
Ainsi : $\boxed{\mathcal{A} = \frac{\sqrt{25{,}3125} \times \sqrt{5}}{2} = 5{,}625}$

D.2 Exercices d'approfondissement

18 Soient $A(-2;1)$ et $B(4;3)$.

1. Calculer les coordonnées de K, milieu de $[AB]$.
2. Soit $M(x_M; y_M)$ un point du cercle de diamètre $[AB]$.
   (a) Faire une figure représentant la situation.
   (b) Conjecturer la nature du triangle ABM.
3. (a) Démontrer que $AB = 2KM$.
   (b) En déduire AB^2 en fonction de x_M et y_M.
   (c) Exprimer $AM^2 + BM^2$ en fonction de x_M et y_M.
   (d) Conclure

1. $x_K = \frac{-2+4}{2} = 1$ et $y_K = \frac{1+3}{2} = 2$, donc $K(1;2)$.
2. (a)

   (b) Conjecture : ABM est rectangle en M.
3. AB est un diamètre du cercle, et [KM] est un rayon du cercle.
   Donc $AB = 2KM$.

   (a) $AB = 2KM \Leftrightarrow AB^2 = 4KM^2$

$$\begin{aligned} AB^2 &= 4\left((x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2\right) \\ &= 4\left((x_M - 1)^2 + (y_M - 2)^2\right) \\ &= 4\left(x_M^2 - 2x_M + 1^2 + y_M^2 - 4y_M + 2^2\right) \\ &= 4x_M^2 - 8x_M + 4 + 4y_M^2 - 16y_M + 16 \\ &= 4x_M^2 - 8x_M + 4y_M^2 - 16y_M + 20 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} AM^2 + BM^2 &= (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2 \\ &= (x_M + 2)^2 + (y_M - 1)^2 + (x_M - 4)^2 + (y_M - 3)^2 \\ &= x_M^2 + 4x_M + (-2)^2 + y_M^2 - 2y_M + 1^2 \\ &\quad + x_M^2 - 8x_M + 4^2 + y_M^2 - 6y_M + 3^2 \\ &= 2x_M^2 - 4x_M + 2y_M^2 - 8y_M + 30 \end{aligned}$$

   (c) $AB^2 = 4x_M^2 - 8x_M + 4y_M^2 - 16y_M + 20$.
   Or, en calculant à l'aide des coordonnées de A et B, on trouve aussi $AB^2 = 40$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} AB^2 &= 4x_M^2 - 8x_M + 4y_M^2 - 16y_M + 20 \\ \Leftrightarrow 40 &= 2(2x_M^2 - 4x_M + 2y_M^2 - 8y_M + 10) \\ \Leftrightarrow & 2x_M^2 - 4x_M + 2y_M^2 - 8y_M + 10 = 20 \\ \Leftrightarrow & 2x_M^2 - 4x_M + 2y_M^2 - 8y_M = 10 \end{aligned}$$

   En revenant à $AM^2 + BM^2$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} AM^2 + BM^2 &= 2x_M^2 - 4x_M + 2y_M^2 - 8y_M + 30 \\ &= 10 + 30 \\ &= 40 \\ &= AB^2 \end{aligned}$$

   Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AMB est rectangle en M.
   On vient ainsi de démontrer la propriété :
   "Si un triangle a pour côté un diamètre de son cercle circonscrit, alors il est rectangle".

E Exercices supplémentaires

19 Soient $A(1;2)$, $B(4;1)$ et $C(2;-3)$.
Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales ($[AC]$ et $[BD]$) se coupent en leur milieu, soit si et seulement si $\frac{x_A+x_C}{2} = \frac{x_B+x_D}{2}$ et $\frac{y_A+y_C}{2} = \frac{y_B+y_D}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} &\Leftrightarrow \frac{1+2}{2} = \frac{4+x_D}{2} \\ &\Leftrightarrow 1 + 2 = 4 + x_D \\ &\Leftrightarrow 3 - 4 = x_D \\ &\Leftrightarrow -1 = x_D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} &\Leftrightarrow \frac{2+(-3)}{2} = \frac{1+y_D}{2} \\ &\Leftrightarrow 2 + (-3) = 1 + y_D \\ &= -2 = y_D \end{aligned}$$

Donc $\boxed{D(-1;-2)}$.

20 Soient $A(-1;5)$, $B(4;-3)$ et $C\left(1;\frac{1}{2}\right)$.
Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$$\begin{aligned} \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} &\Leftrightarrow \frac{-1+1}{2} = \frac{4+x_D}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 = 4 + x_D \\ &\Leftrightarrow -4 = x_D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} &\Leftrightarrow \frac{5+\frac{1}{2}}{2} = \frac{-3+y_D}{2} \\ &\Leftrightarrow 5 + \frac{1}{2} = -3 + y_D \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{2} = -3 + y_D$$
$$\Leftrightarrow \frac{17}{2} = y_D$$

Donc $\boxed{D\left(-4; \frac{17}{2}\right)}$.

21 Soient $A(1;2)$, $B(3;5)$ et $C(-4;7)$ dans un repère.
Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Les diagonales de $ABCD$ sont $[AC]$ et $[BD]$.
On résoud les équations $\frac{x_A+x_C}{2} = \frac{x_B+x_D}{2}$ et $\frac{y_A+y_C}{2} = \frac{y_B+y_D}{2}$.
On trouve : $D(-6;4)$.