1 Faire ses gammes

1 Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} -x-y=-3 \\ -3x+y=-5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -7x+5y=-1 \\ 2x+y=-7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+2y=-7 \\ 6x+3y=3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x-6y=0 \\ -x+3y=-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x+y=-1 \\ -2x+3y=2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2y-4x=-5 \\ 2x+5y=2 \end{cases}$

1. $\boxed{S=\{(2\,;\,1)\}}$.

2. $\boxed{S=\{(-2\,;\,-3)\}}$.

3.

$$\begin{cases} 3x+2y=-7 \\ 6x+3y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y=-14 & 2\times L_1 \\ 6x+3y=3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-17 & L_1-L_2 \\ 6x=3-3\times(-17) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-17 \\ x=9 \end{cases}$$

$$\boxed{S=\{(9;-17)\}}$$

4.

$$\begin{cases} 4x-6y=0 \\ -x+3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-6y=0 \\ x=3y+1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(3y+1)-6y=0 \\ x=3y+1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y=-4 \\ x=3y+1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{2}{3} \\ x=3\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)+1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{2}{3} \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\boxed{S=\left\{\left(-1;-\frac{2}{3}\right)\right\}}$$

5.

$$\begin{cases} 3x+y=-1 \\ -2x+3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+2y=-2 & 2\times L_1 \\ -6x+9y=6 & 3\times L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11y=4 & L_1+L_2 \\ -6x=6-9y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4}{11} \\ -6x=6-9\times\dfrac{4}{11} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4}{11} \\ -6x=\dfrac{30}{11} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4}{11} \\ x=-\dfrac{5}{11} \end{cases}$$

$$\boxed{S=\left\{\left(-\frac{5}{11};\frac{4}{11}\right)\right\}}$$

6.

$$\begin{cases} -4x+2y=-5 \\ 2x+5y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+2y=-5 \\ 4x+10y=4 & 2\times L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12y=-1 \\ 4x+10y=4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{1}{12} \\ 4x=4-10\times\left(-\dfrac{1}{12}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{12} \\ x = \dfrac{29}{24} \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{29}{24}; -\frac{1}{12}\right)\right\}}$$

2 Exercices d'entraînement

2 Certains systèmes peuvent n'admettre aucune solution, d'autres peuvent en admettre une infinité.
Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x - 3y = -14 \\ 2x - 6y = -34 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 12x - 15y = 6 \end{cases}$

1.

$$\begin{cases} x - 3y = -14 \\ 2x - 6y = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6y = -28 \\ 2x - 6y = -34 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 6 & L_1 - L_2 \\ 2x - 6y = -34 \end{cases}$$

On en déduit que le système n'admet aucune solution.

$$\boxed{S = \emptyset}$$

2.

$$\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 12x - 15y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 15y = 6 & 3 \times L_1 \\ 12x - 15y = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 12x - 15y = 6$$

$$\Leftrightarrow -15y = 6 - 12x$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}x$$

Donc le système admet une infinité de solutions. Il s'agit de tous les couples de réels de la forme $\left(x; -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}x\right)$

3 Trois amis pêcheurs achètent des poches d'hameçons et des bouchons. Les poches sont toutes au même prix, les bouchons aussi.

- Le premier prend 3 poches et 2 bouchons.
- Le second prend 2 poches et 4 bouchons.
- Le troisième prend 4 poches et 1 bouchon.

Le premier a dépensé 4,60€, le second 6€. Combien a dépensé le troisième ?

Notons b le prix d'un bouchon et p le prix d'une poche.

D'après l'énoncé, on a $\begin{cases} 3p + 2b = 4{,}60 \\ 2p + 4b = 6 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 3p + 2b = 4{,}6 \\ 2p + 4b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6p + 4b = 9{,}2 & L_1 \times 2 \\ 2p + 4b = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4p = 3{,}2 & L_1 - L_2 \\ 2p + 4b = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = 0{,}8 \\ 2 \times 0{,}8 + 4b = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = 0{,}8 \\ 4b = 4{,}4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = 0{,}8 \\ b = 1{,}1 \end{cases}$$

Le troisième pêcheur a acheté 4 poches et 1 bouchon.
$4 \times 0{,}8 + 1 \times 1{,}1 = 3{,}2 + 1{,}1 = 4{,}3$.
Donc il a dépensé $\boxed{4{,}3€}$.

4 Dans un élevage de poules et de lapins, il y a 2 171 têtes et 4 368 pattes.
Combien y a-t-il de poules et de lapins ?

Chaque poule a 2 pattes et 1 tête.
Chaque lapin a 4 pattes et 1 tête.
Notons p le nombre de poules et l le nombre de lapins. L'énoncé se traduit par :
$\begin{cases} p + l = 2\,171 \\ 2p + 4l = 4\,368 \end{cases}$.

$$\begin{cases} p + l = 2\,171 \\ 2p + 4l = 4\,368 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p + 2l = 4\,342 \\ 2p + 4l = 4\,368 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p+2l = 4\ 342 \\ 2l = 26 & L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p+2l = 4\ 342 \\ l = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p+2\times 13 = 4\ 342 \\ l = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p = 4\ 316 \\ l = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = 2\ 158 \\ l = 13 \end{cases}$$

Il y a donc $\boxed{\text{13 lapins}}$ et $\boxed{\text{2 158 poules}}$ dans cet élevage.

5 Un musée propose un tarif pour les adultes à 7€ et un autre pour les enfant à 4,50€. Lors de cette journée, ce musée a reçu la visites de 205 personnes et la recette totale a été de 1 222,50€.
Déterminer le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée ce jour-là.

Notons a le nombre d'adultes et n le nombre d'enfants ayant visité le musée.

D'après l'énoncé, a et n vérifient $\begin{cases} a+n = 205 \\ 7a+4{,}5n = 1\ 222{,}5 \end{cases}$.

$$\begin{cases} a+n = 205 \\ 7a+4{,}5n = 1\ 222{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 205-n \\ 7(205-n)+4{,}5n = 1\ 222{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 205-n \\ -2{,}5n = -212{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 205-n \\ n = 45 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 205-45 \\ n = 45 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 160 \\ n = 45 \end{cases}$$

On en déduit qu'il y avait ce jour-là $\boxed{\text{160 adultes}}$ et $\boxed{\text{45 enfants}}$ dans ce musée.

6 Un marchand de glace vend des glaces à la vanille à 0,50€ l'unité et des glaces au chocolat 0,75€.

1. À la fin de la journée, il affirme : « Si j'avais vendu les glaces à la vanille 0,75€ et les glaces au chocolat 0,50€, j'aurais fait la même recette : 108,25€ ».
   Qu'en pensez-vous ?
2. Le lendemain, n'ayant pas changé ses prix, il affirme : « La recette du jour est de 71,25€. Si j'avais vendu les glaces à la vanille 0,75€ et celles au chocolat 0,50€, j'aurais fait la même recete qu'hier »
   Qu'en pensez-vous ?

Notons v le nombre de glaces à la vanille vendues et c le nombre de glaces au chocolat vendues.

1. Son affirmation se traduit par le système :

$$\begin{cases} 0{,}5v+0{,}75c = 108{,}25 \\ 0{,}75v+0{,}5c = 108{,}25 \end{cases}$$

Or :

$$\begin{cases} 0{,}5v+0{,}75c = 108{,}25 \\ 0{,}75v+0{,}5c = 108{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}5v+2{,}25c = 324{,}75 & L_1\times 3 \\ 1{,}5v+c = 216{,}5 & L_2\times 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}25c = 108{,}25 & L_1 - L_2 \\ 1{,}5v+c = 216{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 86{,}6 \\ 1{,}5v+86{,}6 = 216{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 86{,}6 \\ 1{,}5v = 130{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 86{,}6 \\ v = 87 \end{cases}$$

Cela signifie dire que le marchand aurait vendu un nombre non entier de glaces au chocolat, ce qui n'est pas possible. Ce qu'il dit est donc incohérent.

2. Cette affirmation se traduit par le système :

$$\begin{cases} 0{,}5v+0{,}75c = 71{,}25 \\ 0{,}75v+0{,}5c = 108{,}25 \end{cases}$$

Or :

$$\begin{cases} 0{,}5v + 0{,}75c = 71{,}25 \\ 0{,}75v + 0{,}5c = 108{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}5v + 2{,}25c = 213{,}75 & L_1 \times 3 \\ 1{,}5v + c = 216{,}5 & L_2 \times 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}25c = -2{,}75 & L_1 - L_2 \\ 1{,}5v + c = 216{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -2{,}2 \\ 1{,}5v - 2{,}2 = 216{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -2{,}2 \\ 1{,}5v = 218{,}7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -2{,}2 \\ v = 145{,}8 \end{cases}$$

Le marchand aurait alors vendu un nombre de glaces au chocolat négatif, ce qui n'est pas cohérent.

3 Exercices d'approfondissement

7 Dans un centre commercial, il y a un tapis de 300 mètres.
Un client marchant à vitesse constante fait l'aller-retour. À l'aller il met 1 minute et 30 secondes. Au retour, à contresens, il met 4 minutes et 30 secondes.
Déterminer la vitesse du piéton et la vitesse du tapis roulant.

Notons p la vitesse du piéton et r la vitesse du tapis roulant.
On sait que 1 minute et 30 secondes correspond à 90 secondes et que 4 minutes et 30 secondes correspond à 270 secondes.
Ainsi, le temps mis par le client à l'aller se traduit par : $(p+r) \times 90 = 300$, soit $90p + 90r = 300$.
Le temps mis par le client au retour se traduit par : $(p-r) \times 270 = 300$, soit $270p - 270r = 300$.

$$\begin{cases} 90p + 90r = 300 \\ 270p - 270r = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 270p + 270r = 900 & L_1 \times 3 \\ 270p - 270r = 300 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 540r = 600 & L_1 - L_2 \\ 270p - 270r = 300 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{10}{9} \\ 270p - 270 \times \dfrac{10}{9} = 300 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{10}{9} \\ 270p - 300 = 300 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{10}{9} \\ p = \dfrac{20}{9} \end{cases}$$

Le tapis a donc une vitesse de $\frac{10}{9}$m.s^1, soit environ $\boxed{1{,}11\text{m.s}^{-1}}$, et le piéton a une vitesse de $\frac{20}{9}$m.s^{-1}, soit d'environ $\boxed{2{,}22\text{m.s}^{-1}}$.