Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	Total
Points	7	4	11
Score			

Exercice 1 .... 7 pts

Soit $f : x \mapsto x^2 - 18x + 36\ln(x) + 11$.

/1 1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

/2 2. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f'(x) = \frac{2\left(x^2 - 9x + 18\right)}{x}$$

/4 3. Dresser le tableau de variations de f.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.
2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 18 + \frac{36}{x} \\ &= \frac{2\left(x^2 - 9x + 18\right)}{x} \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a évidemment $x > 0$.
De même 2 est strictement positif.
Le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du polynôme de degré 2, dont étudie le signe en en cherchant les racines.
On en déduit ensuite que ce dernier est du signe du coefficient devant x^2 sauf entre ses racines.
On obtient ainsi le tableau suivant :

x	0		3		6		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$-34+36\ln(3)$	↘	$-61+36\ln(6)$	↗	$+\infty$

Les images se calculent en remplaçant x par sa valeur dans l'expression de $f(x)$ et en simplifiant l'expression obtenue.
La limite en zéro se justifie par calcul simple de limites (il n'y a pas de forme indéterminée) en prenant en compte le fait que $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
En $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ». On factorise $f(x)$ par x^2 et on fait appel au théorème de limite comparée pour conclure.

Exercice 2 .... 4 pts

Un groupe industriel doit réduire progressivement sa quantité de déchets, qui s'élève actuellement à 25 000 tonnes par an.
Il s'engage à réduire chaque année cette quantité de 6%.
Si le groupe tient cet engagement, au bout de combien d'années la quantité de déchets produite sera-t-elle inférieure à 6 000 tonnes/an ?

Le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 6% est 0,94.
La quantité de déchets produite au bout de n années est modélisée par $25\,000 \times 0{,}94^n$.

$$\begin{aligned} 25\,000 \times 0{,}94^n \leq 6\,000 &\Leftrightarrow 0{,}94^n \leq \frac{6\,000}{25\,000} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(0{,}94^n\right) \leq \ln\left(\frac{6}{25}\right) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0{,}94) \leq \ln\left(\frac{6}{25}\right) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{6}{25}\right)}{\ln(0{,}94)} \quad \text{car } \ln(0{,}94) < 0 \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln\left(\frac{6}{25}\right)}{\ln(0{,}94)} \approx 23{,}06$.
On en déduit que la quantité de déchets produite sera inférieure à 6 000 tonnes/an au bout de 24 ans.

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	Total
Points	7	4	11
Score			

Exercice 1 .... 7 pts

Soit $f : x \mapsto x^2 - 14x + 20\ln(x) + 15$.

/1 1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

/2 2. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f'(x) = \frac{2\left(x^2 - 7x + 10\right)}{x}$$

/4 3. Dresser le tableau de variations de f.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.
2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 14 + \frac{20}{x} \\ &= \frac{2\left(x^2 - 7x + 10\right)}{x} \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a évidemment $x > 0$.
De même 2 est strictement positif.
Le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du polynôme de degré 2, dont étudie le signe en en cherchant les racines.
On en déduit ensuite que ce dernier est du signe du coefficient devant x^2 sauf entre ses racines.
On obtient ainsi le tableau suivant :

x	0		2		5		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$-9+20\ln(2)$	↘	$-30+20\ln(5)$	↗	$+\infty$

Les images se calculent en remplaçant x par sa valeur dans l'expression de $f(x)$ et en simplifiant l'expression obtenue.
La limite en zéro se justifie par calcul simple de limites (il n'y a pas de forme indéterminée) en prenant en compte le fait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
En $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ». On factorise $f(x)$ par x^2 et on fait appel au théorème de limite comparée pour conclure.

Exercice 2 .... 4 pts

Un groupe industriel doit réduire progressivement sa quantité de déchets, qui s'élève actuellement à 20 000 tonnes par an.
Il s'engage à réduire chaque année cette quantité de 5%.
Si le groupe tient cet engagement, au bout de combien d'années la quantité de déchets produite sera-t-elle inférieure à 4 000 tonnes/an ?

Le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 5% est 0,95.
La quantité de déchets produite au bout de n années est modélisée par $20\,000 \times 0{,}95^n$.

$$\begin{aligned} 20\,000 \times 0{,}95^n \leq 4\,000 &\Leftrightarrow 0{,}95^n \leq \frac{4\,000}{20\,000} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(0{,}95^n\right) \leq \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0{,}95) \leq \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln(0{,}95)} \quad \text{car } \ln(0{,}95) < 0 \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln(0{,}95)} \approx 31{,}38$.
On en déduit que la quantité de déchets produite sera inférieure à 4 000 tonnes/an au bout de 32 ans.