Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	Total
Points	5	6	11
Score			

Exercice 1 .... 5 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 5$$

/2 1. Démontrer que $f''(x) = (x-1)(x+5)$

/3 2. Étudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

1. On a $f'(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x$.
   Puis : $f''(x) = x^2 + 4x - 5$.
   Or en développant $(x-1)(x+5)$, on retrouve $x^2 + 4x - 5$.
   On en déduit que $f''(x) = (x-1)(x+5)$.
2. On en déduit que la dérivée seconde s'annule en 1 et en -5.
   $f''(x)$ est un polynôme de degré 2, avec $a > 0$.
   On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{f \text{ est donc convexe sur } [-\infty;-5[\text{ et sur } [1;+\infty[, \text{ et concave sur } [-5;1]}$.
Par ailleurs, $f(-5) = -\frac{515}{4}$ et $f(1) = -\frac{3}{4}$.
Donc $\mathcal{C}_f$ admet pour points d'inflexion les points de coordonnées :

- $\boxed{\left(-5;-\frac{515}{4}\right)}$
- $\boxed{\left(1;-\frac{3}{4}\right)}$

Exercice 2 .... 6 pts

Dans chacun des cas, la fonction dont on donne l'expression est définie sur I.
Préciser son ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée.

/3 1. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x + 4}$; $I = \mathbb{R}$.

/3 2. $g(x) = x^2 \mathrm{e}^{\frac{3}{x}}$; $I = \mathbb{R}^*$.

1. On a $f(x) = (u \circ v)(x)$, avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = 3x^2 - 2x + 4 \end{cases}$.
   u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   v est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a $\Delta < 0$ et $a > 0$, donc $v(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.
Par ailleurs : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) = 6x - 2 \end{cases}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(x) \times (u' \circ v)(x) \\ &= \boxed{\frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+4}}} \end{aligned}$$

2. $g(x) = u(x)v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{\frac{3}{x}} \end{cases}$.
   u est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $v(x) = (r \circ s)(x)$ avec $\begin{cases} r(x) = \mathrm{e}^x \\ s(x) = \dfrac{3}{x} \end{cases}$.
   Or r est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   On en déduit que v est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   On a donc finalement $\boxed{g \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^*}$.
   Par ailleurs : $\begin{cases} r'(x) = \mathrm{e}^x \\ s'(x) = -\dfrac{3}{x^2} \end{cases}$.
   On en déduit $v'(x) = s'(x) \times (r' \circ s)(x) = -\frac{3\,\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}}{x^2}$.
   De plus, $u'(x) = 2x$.
   On a donc finalement :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \boxed{(2x-3)\,\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}} \end{aligned}$$

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice est* ***autorisé****.*
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	Total
Points	5	6	11
Score			

Exercice 1 .... 5 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 6x - 5$$

/2 1. Démontrer que $f''(x) = (x-2)(x+4)$

/3 2. Étudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

1. On a $f'(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 8x$.
   Puis : $f''(x) = x^2 + 2x - 8$.
   Or en développant $(x-2)(x+4)$, on retrouve $x^2 + 2x - 8$.
   On en déduit que $f''(x) = (x-2)(x+4)$.
2. On en déduit que la dérivée seconde s'annule en 2 et en -4.
   $f''(x)$ est un polynôme de degré 2, avec $a > 0$.
   On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   $\boxed{f \text{ est donc convexe sur } [-\infty;-4[\text{ et sur } [2;+\infty[, \text{ et concave sur } [-4;2]}$.
   Par ailleurs, $f(-4) = -93$ et $f(2) = -5$.
   Donc $\mathcal{C}_f$ admet pour points d'inflexion les points de coordonnées :

   - $\boxed{(-4;-93)}$
   - $\boxed{(2;-5)}$

Exercice 2 .... 6 pts

Dans chacun des cas, la fonction dont on donne l'expression est définie sur I.
Préciser son ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée.

/3 1. $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 5}$; $I = \mathbb{R}$.

/3 2. $g(x) = x^2 \mathrm{e}^{\frac{5}{x}}$; $I = \mathbb{R}^*$.

1. On a $f(x) = (u \circ v)(x)$, avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = 2x^2 - x + 5 \end{cases}$.
   u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   v est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   De plus, on a $\Delta < 0$ et $a > 0$, donc $v(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.

Par ailleurs : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) = 4x - 1 \end{cases}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(x) \times (u' \circ v)(x) \\ &= \boxed{\dfrac{4x-1}{2\sqrt{2x^2 - x + 5}}} \end{aligned}$$

2. $g(x) = u(x)v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{\frac{5}{x}} \end{cases}$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$v(x) = (r \circ s)(x)$ avec $\begin{cases} r(x) = \mathrm{e}^x \\ s(x) = \dfrac{5}{x} \end{cases}$.

Or r est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On en déduit que v est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On a donc finalement $\boxed{g \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^*}$.

Par ailleurs : $\begin{cases} r'(x) = \mathrm{e}^x \\ s'(x) = -\dfrac{5}{x^2} \end{cases}$.

On en déduit $v'(x) = s'(x) \times (r' \circ s)(x) = -\frac{5\,\mathrm{e}^{\frac{5}{x}}}{x^2}$.

De plus, $u'(x) = 2x$.

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \boxed{(2x-5)\,\mathrm{e}^{\frac{5}{x}}} \end{aligned}$$