Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	10	10
Score		

Exercice 1 .... 10 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 6$.

/4 1. Dresser le tableau de variations de f. *On veillera à y faire apparaître les images ainsi que les limites, qui sont à calculer.*

/4 2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

/2 3. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

1. $f'(x) = 3x^2 - 3$.
   $\Delta = 0^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 36$.
   $\Delta > 0$, donc $f'(x)$ admet deux racines réelles.
   $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0-6}{2\times 3} = -1$.
   $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0+6}{2\times 3} = 1$.
   Le trinôme est du signe de a, ici 3, sauf entre les racines.
   On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

   On calcule $f(-1) = 8$ et $f(1) = 4$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.
   D'après le tableau précédent, f admet pour minimum 4 sur $[-1;+\infty[$.
   Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $[-1;+\infty[$.
   Par ailleurs, f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;-1]$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, et $f(-1) = 8 > 0$.
   Donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty;-1]$.
   On déduit de ce qui précède que $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
3. On trouve $\alpha \approx -2{,}36$.

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice est* ***autorisé****.*
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	10	10
Score		

Exercice 1 .... 10 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 12x + 20$.

/4 1. Dresser le tableau de variations de f. *On veillera à y faire apparaître les images ainsi que les limites, qui sont à calculer.*

/4 2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

/2 3. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

1. $f'(x) = 3x^2 - 12$.
   $\Delta = 0^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 144$.
   $\Delta > 0$, donc $f'(x)$ admet deux racines réelles.
   $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0-12}{2\times 3} = -2$.
   $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0+12}{2\times 3} = 2$.
   Le trinôme est du signe de a, ici 3, sauf entre les racines.
   On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	36	↘	4	↗	$+\infty$

   On calcule $f(-2) = 36$ et $f(2) = 4$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.
   D'après le tableau précédent, f admet pour minimum 4 sur $[-2;+\infty[$.
   Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $[-2;+\infty[$.
   Par ailleurs, f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;-2]$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, et $f(-2) = 36 > 0$.
   Donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty;-2]$.
   On déduit de ce qui précède que $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
3. On trouve $\alpha \approx -4{,}11$.