Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice est* ***autorisé****.*
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	Total
Points	5	6	11
Score			

Exercice 1 .... 5 pts

Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé.

Soit un plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$.

Déterminer un vecteur normal à ce plan.

On cherche $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tel que $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ et $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$.

En résolvant le système $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{n} = 0\\ \vec{v}\cdot\vec{n} = 0\end{cases}$, on trouve que les vecteurs normaux au plan sont de la forme $\begin{pmatrix}x\\-x\\-x\end{pmatrix}$.

En particulier, $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ (on choisit $x = 1$ arbitrairement) est un vecteur normal au plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 2 .... 6 pts

Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, soient $A(-1;2;2)$, $B(1;2;3)$ et $C(0;6;2)$.

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

On a : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\\ z_B - z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-(-1)\\ 2-2\\ 3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$
et : $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}x_C - x_A\\ y_C - y_A\\ z_C - z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-(-1)\\ 6-2\\ 2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$.
On se place dans un repère orthonormé, donc on peut utiliser l'expression analytique du produit scalaire.
Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= 2\times 1 + 0\times 4 + 1\times 0\\ &= 2\end{aligned}$$

Or on sait aussi que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
Or :

$$\begin{aligned} AB &= \|\overrightarrow{AB}\| \\ &= \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} AC &= \|\overrightarrow{AC}\| \\ &= \sqrt{1^2 + 4^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} \cos\left(\widehat{BAC}\right) &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5} \times \sqrt{17}} \\ &= \frac{2\sqrt{85}}{85} \end{aligned}$$

Donc $\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{2\sqrt{85}}{85}\right) \approx 77°$.

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	Total
Points	5	6	11
Score			

Exercice 1 .... 5 pts

Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé.

Soit un plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$.

Déterminer un vecteur normal à ce plan.

On cherche $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tel que $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ et $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$.

En résolvant le système $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{n}=0\\ \vec{v}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$, on trouve que les vecteurs normaux au plan sont de la forme $\begin{pmatrix}x\\-x\\x\end{pmatrix}$.

En particulier, $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ (on choisit $x=1$ arbitrairement) est un vecteur normal au plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 2 .... 6 pts

Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, soient $A(1;2;3)$, $B(-1;4;1)$ et $C(0;6;2)$.

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

On a : $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-1\\4-2\\1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$

et : $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\\z_C-z_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1\\6-2\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$.

On se place dans un repère orthonormé, donc on peut utiliser l'expression analytique du produit scalaire.
Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=-2\times(-1)+2\times4-2\times(-1)\\&=12\end{aligned}$$

Or on sait aussi que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
Or :

$$\begin{aligned} AB &= \|\overrightarrow{AB}\| \\ &= \sqrt{-2^2 + 2^2 + -2^2} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} AC &= \|\overrightarrow{AC}\| \\ &= \sqrt{-1^2 + 4^2 + -1^2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} \cos\left(\widehat{BAC}\right) &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} \\ &= \frac{12}{2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

Donc $\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 35°$.