Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice est* ***autorisé****.*
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	4	Total
Points	4	3	5	3	15
Score					

Exercice 1 .... 4 pts

Soit $h : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)+x}$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. *Justifier.*

$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \Leftrightarrow -1+x \leq \cos(x)+x \leq 1+x$.
On s'intéresse à la limite de h en $+\infty$, on peut donc supposer $x > 1$.
On a ainsi $-1+x > 0$, et en utilisant la stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, on obtient $\frac{1}{-1+x} \geq \frac{1}{\cos(x)+x} \geq \frac{1}{1+x}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{-1+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x} = 0$.
Donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0}$.

Exercice 2 .... 3 pts

Soit f une fonction dont on donne le tableau de variations.

x	$-\infty$		-8		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ǁ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

Déterminer les limites de la fonction données par le tableau et l'équation des éventuelles asymptotes à $\mathcal{C}_f$. *Justifier.*

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ (pas d'asymptote horizontale ou verticale associée). $\boxed{\lim\limits_{x\to-8^-} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-8^+} f(x) = -\infty}$.
Donc $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $\boxed{x = -8}$ comme asymptote (verticale).
$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$, donc $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $\boxed{y = 0}$ (horizontale) comme asymptote en $+\infty$.

Exercice 3 .... 5 pts

Soit $f : x \mapsto \frac{3x+7}{x-1}$.

/3 1. Déterminer les limites à gauche et à droite de f lorsque x tend vers 1. *Justifier.*
/2 2. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} x-1 = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} x-1 = 0^+$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to 1} 3x+7 = 10$.
   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty}$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x}{x} = 3$.

Exercice 4 .... 3 pts

Soit $f : x \mapsto \frac{x^7+3x^2-5}{x^2-1}$.
Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$. *Justifier*.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^7}{x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} x^5 = -\infty$.
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^7}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} x^5 = +\infty$.

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice est* ***autorisé****.*
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	4	Total
Points	4	3	5	3	15
Score					

Exercice 1 .... 4 pts

Soit $h : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)+x}$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. *Justifier.*

$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \Leftrightarrow -1+x \leq \cos(x)+x \leq 1+x$.
On s'intéresse à la limite de h en $+\infty$, on peut donc supposer $x > 1$.
On a ainsi $-1+x > 0$, et en utilisant la stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, on obtient $\frac{1}{-1+x} \geq \frac{1}{\cos(x)+x} \geq \frac{1}{1+x}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{-1+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x} = 0$.
Donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0}$.

Exercice 2 .... 3 pts

Soit f une fonction dont on donne le tableau de variations.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Déterminer les limites de la fonction données par le tableau et l'équation des éventuelles asymptotes à $\mathcal{C}_f$. *Justifier.*

$\boxed{\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to5^+} f(x) = +\infty}$.
Donc $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $\boxed{x=5}$ comme asymptote (verticale).
$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1}$, donc $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $\boxed{y=1}$ (horizontale) comme asymptote en $-\infty$.
$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ (pas d'asymptote horizontale ou verticale associée).

Exercice 3 .... 5 pts

Soit $f : x \mapsto \frac{4x-9}{x-2}$.

/3 1. Déterminer les limites à gauche et à droite de f lorsque x tend vers 2. *Justifier.*

/2 2. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

1. $\lim\limits_{x\to 2^-} x-2 = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} x-2 = 0^+$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to 2} 4x-9 = -1$.
   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty}$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4x}{x} = 4$.

Exercice 4 .... 3 pts

Soit $f : x \mapsto \frac{3x^5+4x^3-7}{x^2+1}$.
Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$. *Justifier*.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x^5}{x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} 3x^3 = -\infty$.
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} 3x^3 = +\infty$.