Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

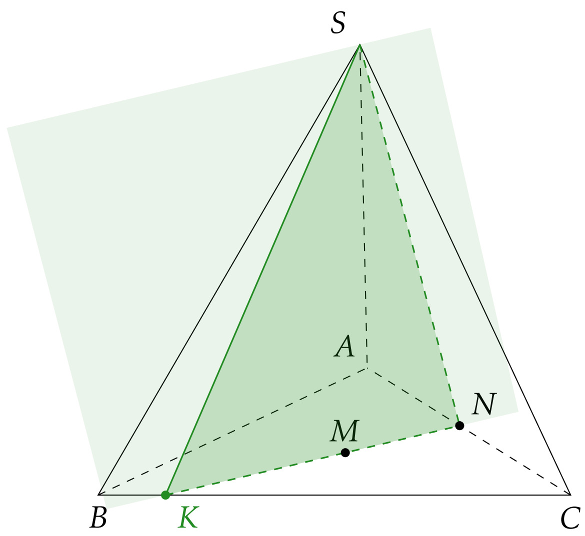
DS de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	Total
Points	9	9	18
Score			

Exercice 1 .... 9 pts

On considère le tétraèdre $ABCS$ ci-dessous.
Soient M un point situé sur la face ABC et N un point de $[AC]$.
L'objectif de l'exercice est de déterminer l'intersection du plan (SMN) avec le tétraèdre $ABCS$.
Toutes les réponses doivent être justifiées.
On veillera à respecter les règles de perspective, en traçant en pointillés les éléments cachés de la figure.



/2 1. Quelle est l'intersection de (SMN) avec (SAC) ?

/2 2. Quelle est l'intersection de (SMN) avec (ABC) ?

3. On cherche maintenant à déterminer l'intersection de (SMN) avec le plan (SBC).

/1 (a) Sans recherche supplémentaire, quel point appartient à $(SMN) \cap (SBC)$?

/1 (b) Déterminer un autre point appartenant à $(SMN) \cap (SBC)$.

/1 (c) En déduire l'intersection de (SMN) avec (SBC).

/2 4. En déduire l'intersection de (SMN) avec le tétraèdre $ABCS$ et tracer cette intersection en utilisant un stylo d'une couleur différente de celle utilisée pour les traits de constructions (excepté le rouge).

1. $S \in (SMN) \cap (SAC)$ et $N \in (SMN) \cap (SAC)$.
   Donc l'intersection de (SMN) et (SAC) est la droite (SN).
2. $M \in (SMN) \cap (ABC)$ et $N \in (SMN) \cap (ABC)$.
   Donc l'intersection de (SMN) et (ABC) est la droite (MN).
3. (a) $S \in (SMN)$ et $S \in (SBC)$, donc $S \in (SMN) \cap (SBC)$.

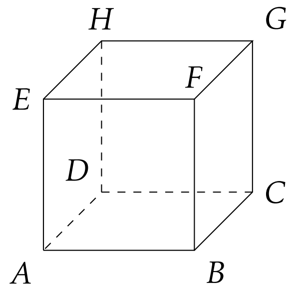
(b) $(MN) \subset (ABC)$ et $(BC) \subset (ABC)$.
(MN) et (BC) sont ainsi coplanaires et sécantes.
Nommons K leur intersection.
$K \in (BC)$, donc $K \in (SBC)$.
$K \in (MN)$, donc $K \in (SMN)$.
Donc $K \in (SMN) \cap (SBC)$.

(c) K et S appartiennent tous deux à $(SMN) \cap (SBC)$, donc l'intersection de (SMN) et (SBC) est la droite (SK).

4. D'après ce qui précède, l'intersection du plan (SMN) avec le tétraèdre $ABCS$ est le triangle SKN.

Exercice 2 .... 9 pts

Soit $ABCDEFGH$ un cube.



On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

/2 1. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans ce repère.

2. Soient $\vec{u} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\vec{w} = 2\overrightarrow{AE}$.

/3 (a) Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

/3 (b) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils linéairement indépendants ?

/1 (c) Que peut-on en déduire ?

1. $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$.

2. (a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.

(b) Soient a, b et c trois réels.

$$\begin{aligned}
a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} &\Rightarrow a\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \vec{0}\\
&\Rightarrow \begin{cases} -a+b=0\\ b=0\\ a+b+2c=0\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases} a=b\\ b=0\\ a+2c=0 \quad (\text{car } b=0)\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases} a=0\\ b=0\\ c=0\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow a = b = c = 0$.
Donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

(c) On en déduit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

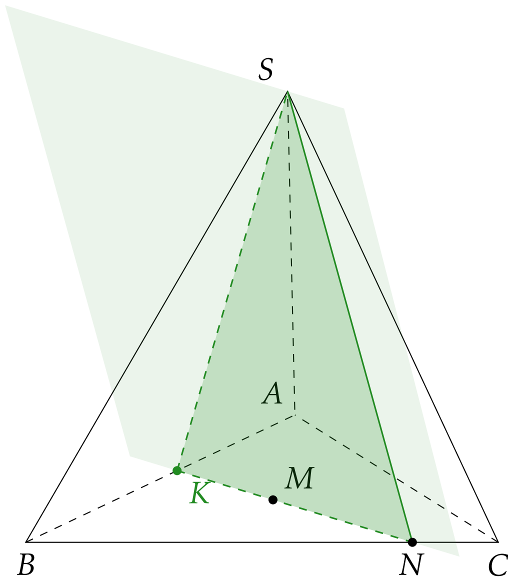
DS de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice est* ***autorisé****.*
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	Total
Points	9	9	18
Score			

Exercice 1 .... 9 pts

On considère le tétraèdre $ABCS$ ci-dessous.
Soient M un point situé sur la face ABC et N un point de $[BC]$.
L'objectif de l'exercice est de déterminer l'intersection du plan (SMN) avec le tétraèdre $ABCS$.
Toutes les réponses doivent être justifiées.
On veillera à respecter les règles de perspective, en traçant en pointillés les éléments cachés de la figure.



/2 1. Quelle est l'intersection de (SMN) avec (SBC) ?

/2 2. Quelle est l'intersection de (SMN) avec (ABC) ?

3. On cherche maintenant à déterminer l'intersection de (SMN) avec le plan (SAB).

/1 (a) Sans recherche supplémentaire, quel point appartient à $(SMN) \cap (SAB)$?

/1 (b) Déterminer un autre point appartenant à $(SMN) \cap (SAB)$.

/1 (c) En déduire l'intersection de (SMN) avec (SAB).

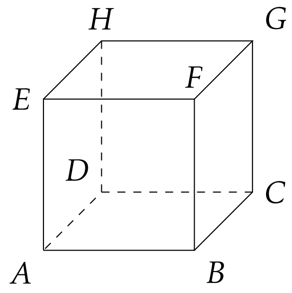
/2 4. En déduire l'intersection de (SMN) avec le tétraèdre $ABCS$ et tracer cette intersection en utilisant un stylo d'une couleur différente de celle utilisée pour les traits de constructions (excepté le rouge).

1. $S \in (SMN) \cap (SBC)$ et $N \in (SMN) \cap (SBC)$.
   Donc l'intersection de (SMN) et (SBC) est la droite (SN).
2. $M \in (SMN) \cap (ABC)$ et $N \in (SMN) \cap (ABC)$.
   Donc l'intersection de (SMN) et (ABC) est la droite (MN).

3. (a) $S \in (SMN)$ et $S \in (SAB)$, donc $S \in (SMN) \cap (SAB)$.
   (b) $(MN) \subset (ABC)$ et $(AB) \subset (ABC)$.
   (MN) et (AB) sont ainsi coplanaires et sécantes.
   Nommons K leur intersection.
   $K \in (AB)$, donc $K \in (SAB)$.
   $K \in (MN)$, donc $K \in (SMN)$.
   Donc $K \in (SMN) \cap (SAB)$.
   (c) K et S appartiennent tous deux à $(SMN) \cap (SAB)$, donc l'intersection de (SMN) et (SAB) est la droite (SK).
4. D'après ce qui précède, l'intersection du plan (SMN) avec le tétraèdre $ABCS$ est le triangle SKN.

Exercice 2 .... 9 pts

Soit $ABCDEFGH$ un cube.



On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

/2 1. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans ce repère.

2. Soient $\vec{u} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\vec{w} = 2\overrightarrow{AE}$.

/3 (a) Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

/3 (b) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils linéairement indépendants ?

/1 (c) Que peut-on en déduire ?

1. $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$.

2. (a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.

(b) Soient a, b et c trois réels.

$$
\begin{aligned}
a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} &\Rightarrow a\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \vec{0}\\
&\Rightarrow \begin{cases} -a+b=0\\ b=0\\ a+b+2c=0 \end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases} a=b\\ b=0\\ a+2c=0 \quad (\text{car } b=0) \end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases} a=0\\ b=0\\ c=0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow a = b = c = 0$.
Donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

(c) On en déduit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.