Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice est* ***autorisé****.*
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	Total
Points	5	4	5	14
Score				

Exercice 1 .... 5 pts

Dans chacun des cas, donner la limite de la suite dont on donne le terme général.

/1 1. $r_n = -2 + \left(\frac{121}{144}\right)^n$

/1 2. $s_n = \frac{n^3}{4+\frac{1}{n}}$

/1 3. $t_n = \frac{3n^2+4n}{9n^2-5}$

/1 4. $u_n = \frac{n^2+n+1}{n^3}$

/1 5. $v_n = \frac{-n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

1. $0 < \frac{121}{144} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{121}{144}\right)^n = 0$.
   Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \boxed{-2}$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 + \frac{1}{n} = 4$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \boxed{+\infty}$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 + 4n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 9n^2 - 5 = +\infty$.
   Il s'agit d'une forme indéterminée.
   Cependant, on a : $t_n = \frac{n^2\left(3+\frac{4n}{n^2}\right)}{n^2\left(9-\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{3+\frac{4}{n}}{9-\frac{5}{n}}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \frac{4}{n} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 9 - \frac{5}{n^2} = 9$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + n + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$.
   Il s'agit d'une forme indéterminée.
   Cependant, on a : $u_n = \frac{n^2\left(1+\frac{n}{n^2+\frac{1}{n^2}}\right)}{n^3} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{n}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \boxed{0}$.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$.
   $0 < \frac{3}{4} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$.
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0^+$.
   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \boxed{-\infty}$.

Exercice 2 .... 4 pts

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + n - 2$.
On admet que $v_5 = \frac{553}{243}$.

/2 1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 5$, $v_n \geq n - 3$.

/2 2. En déduire la limite de la suite (v_n).

1. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $v_n \geq n-3$ ».
   - Initialisation : $v_5 = \frac{553}{243} \geq 2 = 5 - 3$.
     Donc $\mathcal{P}_5$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons qu'il existe $n \geq 5$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{3}v_n + n - 2 \\ &\geq \frac{1}{3} \times (n-3) + n - 2 \quad \text{(hyp. de récurrence)} \\ &\geq n - 2 \quad (\text{car } n \geq 5, \text{ et donc } n-3 > 0) \end{aligned}$$

     Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : $\mathcal{P}_5$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 5.
     Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 5$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-3) = +\infty$.
   De plus, nous avons montré que pour tout $n \geq 5$, $v_n \geq n - 3$.
   Donc par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 3 .... 5 pts

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n+\cos(n)}{n^2+4}$.

/1 1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n-1}{n^2+4} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2+4}$.

/2 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{n-1}{n^2+4}$ et $w_n = \frac{n+1}{n^2+4}$.
Déterminer les limites des suites (v_n) et (w_n).

/2 3. En déduire la limite de la suite (u_n).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$.

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(n) \leq 1 &\Leftrightarrow n-1 \leq n + \cos(n) \leq n+1 \\ &\Leftrightarrow \frac{n-1}{n^2+4} \leq \frac{n+\cos(n)}{n^2+4} \leq \frac{n+1}{n^2+4} \quad (\text{car } n^2+4 > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 4 = +\infty$.
   Il s'agit d'une forme indéterminée.
   Cependant, on a : $v_n = \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{1-\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$.
   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{4}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 + \frac{4}{n^2}\right) = +\infty$.
   On a donc finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \boxed{0}$.
   On montre de même que $w_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
3. On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \boxed{0}$.
   Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \boxed{0}$.

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	Total
Points	5	4	5	14
Score				

Exercice 1 .... 5 pts

Dans chacun des cas, donner la limite de la suite dont on donne le terme général.

/1 1. $r_n = -2 + \left(\frac{121}{144}\right)^n$

/1 2. $s_n = \frac{n^3}{4+\frac{1}{n}}$

/1 3. $t_n = \frac{3n^2+4n}{9n^2-5}$

/1 4. $u_n = \frac{n^2+n+1}{n^3}$

/1 5. $v_n = \frac{-n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

1. $0 < \frac{121}{144} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{121}{144}\right)^n = 0$.
   Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \boxed{-2}$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 + \frac{1}{n} = 4$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \boxed{+\infty}$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 + 4n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 9n^2 - 5 = +\infty$.
   Il s'agit d'une forme indéterminée.
   Cependant, on a : $t_n = \frac{n^2\left(3+\frac{4n}{n^2}\right)}{n^2\left(9-\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{3+\frac{4}{n}}{9-\frac{5}{n}}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \frac{4}{n} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 9 - \frac{5}{n^2} = 9$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + n + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$.
   Il s'agit d'une forme indéterminée.
   Cependant, on a : $u_n = \frac{n^2\left(1+\frac{n}{n^2+\frac{1}{n^2}}\right)}{n^3} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{n}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \boxed{0}$.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$.
   $0 < \frac{3}{4} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$.
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0^+$.
   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \boxed{-\infty}$.

Exercice 2 .... 4 pts

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + n - 2$.
On admet que $v_5 = \frac{553}{243}$.

/2 1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 5$, $v_n \geq n-3$.

/2 2. En déduire la limite de la suite (v_n).

1. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $v_n \geq n-3$ ».
   - Initialisation : $v_5 = \frac{553}{243} \geq 2 = 5-3$.
     Donc $\mathcal{P}_5$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons qu'il existe $n \geq 5$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{3}v_n + n - 2 \\ &\geq \frac{1}{3} \times (n-3) + n - 2 \quad \text{(hyp. de récurrence)} \\ &\geq n-2 \quad (\text{car } n \geq 5, \text{ et donc } n-3 > 0) \end{aligned}$$

     Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : $\mathcal{P}_5$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 5.
     Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 5$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-3) = +\infty$.
   De plus, nous avons montré que pour tout $n \geq 5$, $v_n \geq n-3$.
   Donc par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 3 .... 5 pts

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n+\cos(n)}{n^2+4}$.

/1 1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n-1}{n^2+4} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2+4}$.

/2 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{n-1}{n^2+4}$ et $w_n = \frac{n+1}{n^2+4}$.
Déterminer les limites des suites (v_n) et (w_n).

/2 3. En déduire la limite de la suite (u_n).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$.

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(n) \leq 1 &\Leftrightarrow n-1 \leq n+\cos(n) \leq n+1 \\ &\Leftrightarrow \frac{n-1}{n^2+4} \leq \frac{n+\cos(n)}{n^2+4} \leq \frac{n+1}{n^2+4} \quad (\text{car } n^2+4>0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+4 = +\infty$.
   Il s'agit d'une forme indéterminée.
   Cependant, on a : $v_n = \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{1-\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n} = 1$.
   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{4}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1+\frac{4}{n^2}\right) = +\infty$.
   On a donc finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \boxed{0}$.
   On montre de même que $w_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
3. On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \boxed{0}$.
   Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \boxed{0}$.