BACCALAURÉAT BLANC

4 mai 2022

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5
*Le candidat traite **3 exercices** au choix parmi les 4 exercices proposés.*

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **7 points**

Principaux domaines abordés : Fonction exponentielle ; continuité ; dérivation

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

où :

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromoles par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heures,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromoles par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litres par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.
En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$C(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right)$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0;+\infty[$.
2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonction

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)$$

Démontrer que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0 ↘	-1

   (a) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.

   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;80]$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

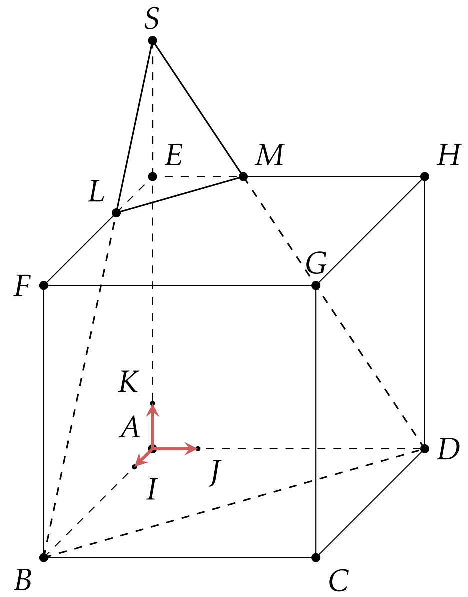
Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est à dire au plateau d'être égal 15.

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.
   (a) Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
   (b) Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à $5,9$ micromoles par litre.
   En déduire, en utilisant les résultats de la partie B, une valeur approchée au dixième de la clairance de ce patient.
2. (a) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t)$ en fonction de a et de d.
   (b) En déduire la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

Exercice 2 **7 points**

Principaux domaines abordés :
Géométrie dans l'espace

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.
Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI}\,,\,\overrightarrow{AJ}\,,\,\overrightarrow{AK}\right)$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.
Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2;0;6)$
2. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (BL) et de la droite (AK).
   (b) Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0;0;9)$.

3. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $\vec{n}$ est normal au plan (BDL).
   (b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est :
   $$3x + 3y + 2z - 18 = 0$$
   (c) On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :
   $$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 6 \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$
   Calculer les coordonnées du point M.
4. Calculer le volume du tétraèdre $SELM$. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$
5. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60°.
   Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

Exercice 3 **7 points**

Principaux domaines abordés :
Probabilités ; Variables aléatoires

Le directeur d'un hôtel tente de louer toutes ses chambres malgré les annulations de dernière minute de quelques clients.
Il a instauré un système de réservations et a constaté que 20% des clients réservent par téléphone, les autres utilisent internet.
Mais certains clients ayant réservé ne viennent pas ; cela concerne 4% des clients ayant réservé par téléphone, et 10% des clients ayant réservé par internet.
On considère une réservation prise au hasard.
On considère les évènements suivants :

- I : « la réservation a été faite sur internet »
- T : « la réservation a été faite par téléphone »
- P : « le client se présente à l'hôtel »

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
2. Démontrer que $P(P) = 0,912$.
3. On considère un client présent dans l'hôtel.
   Quelle est la probabilité qu'il ait réservé par internet ? *Arrondir au millième.*
4. Le directeur sait qu'il ne peut accueillir que 100 clients, mais il a accordé 106 réservations.
   Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de clients qui se présentent à l'hôtel.
   Donner la loi de probabilité de X.
5. Quelle est la probabilité que les 106 clients se présentent à l'hôtel ? *Arrondir à* 10^{-5}.

6. Quelle est la probabilité que le directeur se retrouve en situation de surréservation, c'est à dire qu'au moins 101 clients se présentent à l'hôtel ?
7. Quel est le nombre maximum de réservations que doit accorder le directeur pour que la probabilité que tous les client qui se présenteront aient une chambre soit supérieure ou égal à 0,99 ? *Justifier à l'aide de résultats obtenus avec la calculatrice.*

Exercice 4 **7 points**

Principaux domaines abordés : Suites ; suites géométriques ; logarithme népérien ; limites

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$$

2. (a) En déduire que pour tout entier naturel n, $\mathrm{e} - \sqrt{u_n} \geqslant 0$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) En déduire la convergence de la suite (u_n).
3. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = \ln(u_n) - 2$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. *On rappelle que* $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$$

   (c) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \mathrm{e}^{2 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

   (d) Calculer la limite de la suite (u_n).