BACCALAURÉAT BLANC

4 mai 2022

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte 11 pages numérotées de 1/11 à 11/11
*Le candidat traite **3 exercices** au choix parmi les 4 exercices proposés.*

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **7 points**

Principaux domaines abordés :
Fonction exponentielle ; continuité ; dérivation

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

où :

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromoles par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heures,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromoles par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litres par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.
En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$C(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right)$$

/1 1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0;+\infty[$.

/0,5 2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonction

/1 1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)$$

Démontrer que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0 $\searrow$	-1

/0,5 (a) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.

/0,5 (b) En déduire le sens de variation de la fonction f.

/1 3. Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;80]$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est à dire au plateau d'être égal 15.

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.

/0,5 (a) Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.

/0,5 (b) Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à $5,9$ micromoles par litre.
En déduire, en utilisant les résultats de la partie B, une valeur approchée au dixième de la clairance de ce patient.

/1 2. (a) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ en fonction de a et de d.

/0,5 (b) En déduire la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

Partie A

1. Pour tout réel $t > 0$, $C'(t) = 12\times\left(-\left(-\frac{7}{80}\right)\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right) = \frac{84}{80}\,\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} = \frac{21}{20}\,\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}$.

   Or pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} > 0$, et donc $C'(t) > 0$. On en déduit que C est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} = 0$.
   Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} = 1$.
   Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 12$.
   Le traitement de ce patient n'est donc pas efficace.

Partie B

1. $f(x) = u(x)v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = \dfrac{105}{x} \\ v(x) = 1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = -\dfrac{105}{x^2} \\ v'(x) = \dfrac{3}{40}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\end{cases}$.

   Ainsi :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\\
&= -\frac{105}{x^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)+\frac{105}{x}\times\frac{3}{40}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\\
&= -\frac{105}{x^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)+\frac{105}{x^2}\times x\times\frac{3}{40}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\\
&= \frac{105}{x^2}\left(\frac{3x}{40}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}-\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)\right)\\
&= \frac{105}{x^2}\left(\frac{3x}{40}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}+\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}-1\right)\\
&= \frac{105}{x^2}\times g(x)
\end{aligned}$$

2. (a) D'après le tableau de variations de g sur $[0;+\infty[$, on a $g(x) < 0$ pour tout $x\in\,]0;+\infty[$.

   (b) Pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.
   Or $g(x) < 0$ pour tout $x\in\,]0;+\infty[$.
   Donc $f'(x) < 0$ pour tout $x\in\,]0;+\infty[$.
   On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

3. D'après ce qui précède, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]1;80[$.
   De plus :
   - $f(1) \approx 7{,}59 > 5,9$
   - $f(80) \approx 1{,}31 < 5,9$

   Donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur $[1;80]$.
   Notons α cette solution. On trouve $\alpha \approx 8,1$.

Partie C

1. (a) Avec $d = 105$, on a $C(t) = \frac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} C(6) &= \frac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}\times 6}\right) \\ &= \frac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}a}\right) \end{aligned}$$

   (b) On remarque que $C(6) = f(a)$.
   On cherche donc a tel que $f(a) = 5,9$. Or nous avons dans la partie B que cela implique $a \approx 8,1$.
2. (a) $a > 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t} = 1$ et ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \frac{d}{a}$.
   (b) Avec $a = 8,1$, on a :

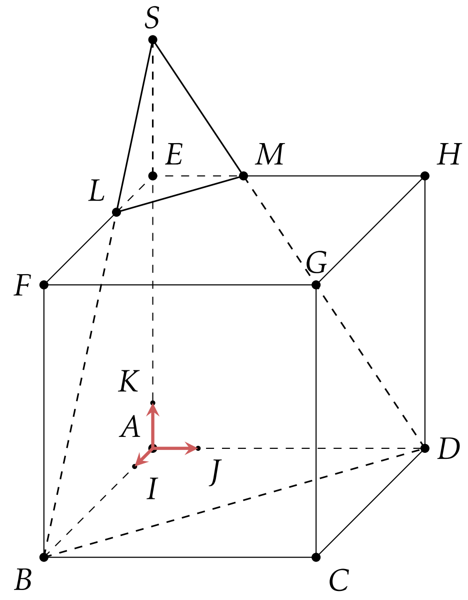
$$\begin{aligned} \frac{d}{a} = 15 &\Leftrightarrow \frac{d}{8,1} = 15 \\ &\Leftrightarrow d = 15 \times 8,1 \\ &\Leftrightarrow d = 121,5 \end{aligned}$$

   Pour que le traitement de ce patient soit efficace, il faut donc maintenir un débit d'environ 121,5 micromoles par heure.

Exercice 2 **7 points**

Principaux domaines abordés :
Géométrie dans l'espace

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.
Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI}\,,\,\overrightarrow{AJ}\,,\,\overrightarrow{AK}\right)$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.
Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

/0,5 1. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2;0;6)$

/1,5 2. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (BL) et de la droite (AK).

/0,5 (b) Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0;0;9)$.

3. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$.

/0,5 (a) Vérifier que $\vec{n}$ est normal au plan (BDL).

/1 (b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est :

$$3x + 3y + 2z - 18 = 0$$

/1 (c) On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 6 \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

Calculer les coordonnées du point M.

/1 4. Calculer le volume du tétraèdre $SELM$. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

/1 5. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60°.
Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

1.

$$\overrightarrow{FL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FE} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L - x_F = \frac{2}{3}(x_E - x_F) \\ y_L - y_F = \frac{2}{3}(y_E - y_F) \\ z_L - z_F = \frac{2}{3}(z_E - z_F) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_L = \frac{2}{3}(0-6)+6 \\ y_L = \frac{2}{3}(0-0) \\ z_L = \frac{2}{3}(6-6)+6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_L = 2 \\ y_L = 0 \\ z_L = 6 \end{cases}$$

2. (a)
   - $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}$ et $B(6;0;0)$ appartient à (BL).

     On en déduit la représentation paramétrique suivante :

     $$\begin{cases} x = 6-4t_1 \\ y = 0+0t_1 \\ z = 0+6t_1 \end{cases} \text{, avec } t_1 \in \mathbb{R}$$

     soit :

     $$\begin{cases} x = 6-4t_1 \\ y = 0 \\ z = 6t_1 \end{cases}$$

   - $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $A(0;0;0)$ appartient à (AK).

     On en déduit la représentation paramétrique suivante :

     $$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t_2 \end{cases} \text{, avec } t_2 \in \mathbb{R}$$

   (b) S est l'intersection de (BL) et (AK).
   On doit donc avoir :

   $$\begin{cases} 6-4t_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 6t_1 = t_2 \end{cases}$$

   $6-4t_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{3}{2}$.
   Ainsi, le point de (BL) qui appartient aussi à (AK) se trouve en prenant $t_1 = \frac{3}{2}$.
   On en déduit $x = 6-4\times\frac{3}{2} = 0$, $y = 0$ et $z = 6\times\frac{3}{2} = 9$. On a donc bien $S(0;0;9)$.

3. (a) $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}$.

   On montre que $\overrightarrow{BD}\cdot\vec{n}=0$ et $\overrightarrow{BL}\cdot\vec{n}=0$.
   On en déduit que $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BD}$ et à $\overrightarrow{BL}$.
   Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BDL).

   (b) $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ et normal au plan (BDL), donc $3x+3y+2z+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$, est une équation cartésienne de (BDL).
   De plus :

$$\begin{aligned}B\in(BDL) &\Leftrightarrow 3x_B+3y_B+2z_B+d=0\\&\Leftrightarrow 3\times6+3\times0+2\times0+d=0\\&\Leftrightarrow d=-18\end{aligned}$$

   (c) Soit $M\left(x;y;z\right)$ le point d'intersection de (EH) et (BDL).
   Les coordonnées de M vérifient le système :

$$\begin{cases}x=0\\y=t\\z=6\\3x+3y+2z-18=0\end{cases}$$

   Or :

$$\begin{aligned}3\times0+3\times t+2\times6-18=0 &\Leftrightarrow 3t-6=0\\&\Leftrightarrow t=2\end{aligned}$$

   On en déduit $M(0;2;6)$.

4. Considérons le triangle LEM comme base de la pyramide.
   La hauteur correspondant à cette base est la longueur SE.
   On calcule : $EL=2$ et $EM=2$.
   Notons $\mathcal{B}$ l'aire du triangle LEM.
   LEM est rectangle en E, donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}&=\frac{EL\times EM}{2}\\&=\frac{2\times2}{2}\\&=2\end{aligned}$$

   De plus, $SE=3$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\times2\times3\\&=2\end{aligned}$$

5. On calcule : $\overrightarrow{LS}\cdot\overrightarrow{LE}=4$.
   Par ailleurs :

$$\overrightarrow{LS}\cdot\overrightarrow{LE}=\|\overrightarrow{LS}\|\times\|\overrightarrow{LE}\|\times\cos\left(\widehat{SLE}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{SLE}\right)=\frac{\overrightarrow{LS}\cdot\overrightarrow{LE}}{\|\overrightarrow{LS}\|\times\|\overrightarrow{LE}\|}$$

Or : $\|\overrightarrow{LS}\| = \sqrt{13}$ et $\|\overrightarrow{LE}\| = 2$.
Donc :

$$\begin{aligned}\widehat{SLE} &= \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{13}\times 2}\right)\\ &\approx 56{,}31\end{aligned}$$

La contrainte d'angle est donc bien respectée.

Exercice 3 **7 points**

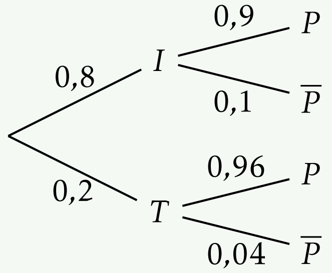
Principaux domaines abordés :
Probabilités ; Variables aléatoires

Le directeur d'un hôtel tente de louer toutes ses chambres malgré les annulations de dernière minute de quelques clients.
Il a instauré un système de réservations et a constaté que 20% des clients réservent par téléphone, les autres utilisent internet.
Mais certains clients ayant réservé ne viennent pas ; cela concerne 4% des clients ayant réservé par téléphone, et 10% des clients ayant réservé par internet.
On considère une réservation prise au hasard.
On considère les évènements suivants :

- I : « la réservation a été faite sur internet »
- T : « la réservation a été faite par téléphone »
- P : « le client se présente à l'hôtel »

/1 1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
/1 2. Démontrer que $P(P) = 0,912$.
/1 3. On considère un client présent dans l'hôtel.
Quelle est la probabilité qu'il ait réservé par internet ? *Arrondir au millième*.
/1 4. Le directeur sait qu'il ne peut accueillir que 100 clients, mais il a accordé 106 réservations.
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de clients qui se présentent à l'hôtel.
Donner la loi de probabilité de X.
/1 5. Quelle est la probabilité que les 106 clients se présentent à l'hôtel ? *Arrondir à* 10^{-5}.
/1 6. Quelle est la probabilité que le directeur se retrouve en situation de surréservation, c'est à dire qu'au moins 101 clients se présentent à l'hôtel ?
/1 7. Quel est le nombre maximum de réservations que doit accorder le directeur pour que la probabilité que tous les client qui se présenteront aient une chambre soit supérieure ou égal à $0,99$? *Justifier à l'aide de résultats obtenus avec la calculatrice*.

1.



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(P) &= P(I\cap P)+P(T\cap P)\\ &= P(I)\times P_I(P)+P(T)\times P_T(P)\\ &= 0{,}8\times 0{,}9+0{,}2\times 0{,}96\\ &= 0{,}912 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P_P(I) &= \frac{P(I\cap P)}{P(P)}\\ &= \frac{0{,}72}{0{,}912}\\ &\approx 0{,}789 \end{aligned}$$

4. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(106\ ;\ 0{,}912)$.
5.

$$\begin{aligned} P(X=106) &= \binom{106}{106}\times 0{,}912^{106}\times(1-0{,}912)^{106-106}\\ &\approx 6{,}0\cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} P(X\geqslant 101) &= 1-P(X<101)\\ &= 1-P(X\leqslant 100)\\ &\approx 0{,}0871 \end{aligned}$$

7. Pour $n=103$: $P(X\leqslant 100)\approx 0{,}995$.
Pour $n=104$: $P(X\leqslant 100)\approx 0{,}984$.
Donc le nombre maximum de réservations que doit accorder le directeur pour que la probabilité que tous les clients se présentant ait une chambre soit supérieure à $0{,}99$ est 103.

EXERCICE 4 **7 points**

Principaux domaines abordés :
Suites ; suites géométriques ; logarithme népérien ; limites

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=\mathrm{e}\times\sqrt{u_n}$$

/1,5 1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$1\leqslant u_n\leqslant \mathrm{e}^2$$

/0,5 2. (a) En déduire que pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}-\sqrt{u_n}\geqslant 0$.
/1 (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
/0,5 (c) En déduire la convergence de la suite (u_n).
3. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n=\ln(u_n)-2$$

/1 (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. *On rappelle que* $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

/1 (b) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$$

/0,5 (c) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \mathrm{e}^{2-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

/1 (d) Calculer la limite de la suite (u_n).

1. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$ ».
   - Initialisation : $u_0 = 1$, donc $1 \leqslant u_0 \leqslant \mathrm{e}^2$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - Hérédité : Soit $n \geqslant 0$ un entier naturel tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
     La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Donc :

     $$1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2 \Rightarrow \sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}^2}$$

     On a donc :

     $$\begin{aligned} 1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2 &\Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \mathrm{e} \\ &\Rightarrow \mathrm{e}\times 1 \leqslant \mathrm{e}\times\sqrt{u_n} \leqslant \mathrm{e}\times\mathrm{e} \\ &\Rightarrow \mathrm{e} \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^2 \end{aligned}$$

     Or $1 \leqslant \mathrm{e}$.
     Donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^2$.
     Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : $\mathcal{P}_0$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 0.
     Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
2. (a) La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   Donc :

   $$\begin{aligned} 1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2 &\Rightarrow \sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}^2} \\ &\Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \mathrm{e} \\ &\Rightarrow \sqrt{u_n} \leqslant \mathrm{e} \\ &\Rightarrow \mathrm{e} - \sqrt{u_n} \geqslant 0 \end{aligned}$$

   (b)

   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \mathrm{e}\times\sqrt{u_n} - u_n \\ &= \mathrm{e}\times\sqrt{u_n} - \sqrt{u_n}^2 \\ &= \sqrt{u_n}\left(\mathrm{e} - \sqrt{u_n}\right) \end{aligned}$$

   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{u_n} \geqslant 0$, et, d'après la question précédente, $\mathrm{e} - \sqrt{u_n} \geqslant 0$.
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
   Donc (u_n) est croissante.

   (c) (u_n) est croissante et majorée par e^2, donc d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge.

3. (a)

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - 2 \\
&= \ln\left(\mathrm{e} \times \sqrt{u_n}\right) - 2 \\
&= \ln(\mathrm{e}) + \ln\left(\sqrt{u_n}\right) - 2 \\
&= 1 + \ln\left(u_n^{\frac{1}{2}}\right) - 2 \\
&= \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 \\
&= \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2) \\
&= \frac{1}{2}v_n
\end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

(b) $v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln(1) - 2 = 0 - 2 = -2$.

$$\begin{aligned}
v_n &= v_0 \times q^n \\
&= -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= -2 \times \frac{1^n}{2^n} \\
&= -2 \times \frac{1}{2^n} \\
&= -\frac{2}{2^n} \\
&= -\frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
v_n = \ln(u_n) - 2 &\Leftrightarrow \ln(u_n) = v_n + 2 \\
&\Leftrightarrow u_n = \mathrm{e}^{v_n + 2} \\
&\Leftrightarrow u_n = \mathrm{e}^{2 - \frac{1}{2^{n-1}}}
\end{aligned}$$

(d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = 2$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2 - \frac{1}{2^{n-1}}} = \mathrm{e}^2$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \mathrm{e}^2$.