BACCALAURÉAT BLANC

29 avril 2022

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte 10 pages numérotées de 1/10 à 10/10
*Le candidat traite **3 exercices** au choix parmi les 4 exercices proposés.*

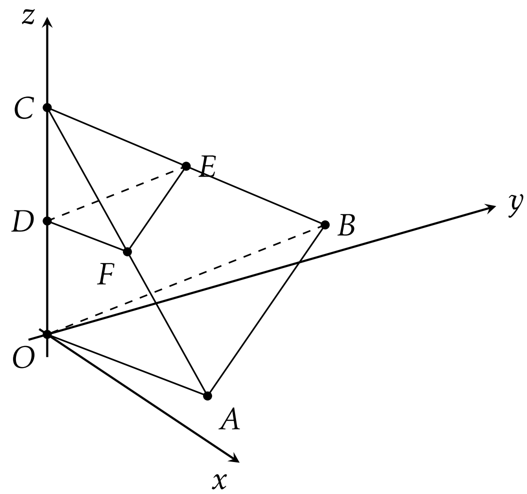
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **7 points**

Principaux domaines abordés :
Géométrie dans l'espace ; orthogonalité dans l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(10;0;1)$, $B(1;7;1)$ et $C(0;0;5)$.



/1 1. (a) Démontrer que les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.

/1 (b) Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{AOB}$, arrondie au dixième.

/1 2. Vérifier que $7x + 9y - 70z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

/1 3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CA).

/1 4. Soit D le milieu du segment $[OC]$. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ parallèle au plan (OAB) passant par D.

/1 5. Le plan $\mathcal{P}$ coupe la droite (CB) en E et la droite (CA) en F.
Déterminer les coordonnées du point F. On admet que le point E a pour coordonnées $E\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2};3\right)$.

/1 6. Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (AB).

1. (a) $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}10\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\7\\1\end{pmatrix}$.
On en déduit que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 11 \neq 0$.
Donc (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.

(b) On calcule $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{101}$ et $\|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{51}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 11 &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OB}\|\times\cos\left(\widehat{AOB}\right) = 11\\ &\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{AOB}\right) = \frac{11}{\sqrt{101}\times\sqrt{51}}\end{aligned}$$

On en déduit que $\widehat{AOB} = \arccos\left(\frac{11}{\sqrt{101}\times\sqrt{51}}\right) \approx 81{,}2°$

2. On démontrer que les coordonnées des points O, A et B vérifient l'équation donnée.

3. La droite (CA) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}10\\0\\-4\end{pmatrix}$.

   De plus, elle passe par le point $C(0;0;5)$.
   (CA) admet donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = 0 \\ z = 5-4t \end{cases} \text{, avec } t \in \mathbb{R}$$

4. D est le milieu de $[OC]$, donc $D\left(0;0;\frac{5}{2}\right)$.
   $\mathcal{P}$ est parallèle à (OAB), donc un vecteur normal de (OAB) est aussi un vecteur normal de $\mathcal{P}$.
   Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc de la forme $7x+9y-70z+d=0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} D \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow 7x_D + 9y_D - 70z_D + d = 0 \\ &\Leftrightarrow d = 175 \end{aligned}$$

   Donc $7x+9y-70z+175=0$ est une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
5. F est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de (CA), donc ses coordonnées vérifient la représentation paramétrique de (CA) et l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = 0 \\ z = 5-4t \\ 7x+9y-70z+175=0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

   On en déduit ensuite $x_F = 5$, $y_F = 0$ et $z_F = 3$, soit $F(5;0;3)$.
6. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\-\frac{7}{2}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\7\\0\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{EF}$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
   Donc (AB) et (EF) sont parallèles.

Exercice 2 **7 points**

Principaux domaines abordés :
Fonction exponentielle ; dérivation ; limites de fonctions

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.
Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètres de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.
Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 10\,\mathrm{e}^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$u(x) = -\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

/2 1. Vérifier que pour tout x positif on a $f'(x) = -u(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ puis en déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

/0,5 2. (a) Calculer $f(20)$.
En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

/1,5 (b) Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale.
On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$.
On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0;+\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que :

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}\big(1+u(x)\big)$$

/2 (a) Déterminer les variations de f' sur $[0;+\infty[$.

/1 (b) En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

1.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 10\times u'(x)\times \mathrm{e}^{u(x)}\\
&= 10\times\left(-\left(-\frac{1}{10}\right)\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}\right)\times \mathrm{e}^{u(x)}\\
&= \mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}\,\mathrm{e}^{u(x)}\\
&= -u(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}
\end{aligned}$$

Pour tout $x\in[0;+\infty[$, $\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}} > 0$.
Donc pour tout $x\in[0;+\infty[$, $u(x) < 0$ et donc $-u(x) > 0$.
De plus, $\mathrm{e}^{u(x)} > 0$ pour tout $x\in[0;+\infty[$.
Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x\in[0;+\infty[$.
Donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2. (a) $f(20) = \frac{10}{\mathrm{e}} \approx 3{,}678$.
Donc après 20 jours de repousse la queue du lézard mesure environ 3,7 cm.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{x}{10} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 10\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}} = 10$.
Donc non la queue du lézard ne peut pas mesurer 11 cm selon cette modélisation.

3. (a) Nous avons que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $u(x) < 0$ et $\mathrm{e}^{u(x)} > 0$.
Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
1+u(x) > 0 &\Leftrightarrow 1-\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}} > 0\\
&\Leftrightarrow -\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}} > -1\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}} < 1\\
&\Leftrightarrow 2-\frac{x}{10} < 0\\
&\Leftrightarrow -\frac{x}{10} < -2\\
&\Leftrightarrow \frac{x}{10} > 2\\
&\Leftrightarrow x > 20
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau suivant :

x	0		20		$+\infty$
$u(x)$		$-$		$-$	
$\mathrm{e}^{u(x)}$		$+$		$+$	
$1+u(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(b) On en déduit que la vitesse de repousse est maximale au bout de 20 jours.

Exercice 3 — 7 points

Principaux domaines abordés :
Probabilités ; répétition d'épreuves indépendantes

Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle, composée à 65% d'hommes. Des études préalables ont montré que 30% des hommes contactés écoutent les explications, les autres raccrochant aussitôt (ou se déclarant immédiatement non intéressés).
parmi les femmes, 60% écoutent les explications.
On admet que ces proportions restent stables.

Partie A

On choisit au hasard une personne dans le fichier clients. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie.
On note les évènements suivants :

- H : « la personne choisie est un homme »
- F : « la personne choisie est une femme »
- E : « la personne choisie écoute les explication du démarcheur »

$\overline{E}$ est l'évènement contraire de E.

/1 1. Dresser un arbre de probabilités représentant la situation.

/1 2. (a) Traduire par une phrase l'évènement $E \cap F$ et calculer sa probabilité.

/1 (b) Montrer que la probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est égale à 0,405.

/1 (c) Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute.
Quelle est la probabilité que ce soit un homme ? On donnera le résultat arrondi au centième.

Partie B

Les relevés réalisés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12% des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait.
Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.
On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions indentiques.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

/0,5 1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

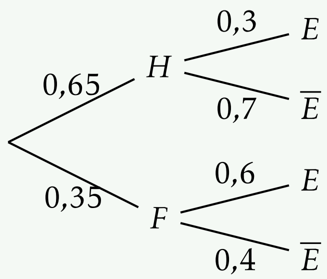
/0,5 2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. On arrondira le résultat au centième.

/1 3. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. On donnera une valeur arrondie au dix millième.

/1 4. Déterminer le nombre minimum d'appels que doit effectuer un employé dans la journée pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une souscription soit supérieure ou égale à 0,99.

Partie A

1.



2. (a) $E \cap F$: « la personne choisie écoute et est une femme ».

$$\begin{aligned} P(E\cap F) &= P(F)\times P_F(E) \\ &= 0{,}35\times 0{,}6 \\ &= 0{,}21 \end{aligned}$$

(b) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(H\cap E)+P(F\cap E) \\ &= P(H)\times P_H(E)+0{,}21 \\ &= 0{,}65\times 0{,}3+0{,}21 \\ &= 0{,}405 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P_E(H) &= \frac{P(E\cap H)}{P(E)} \\ &= \frac{0{,}195}{0{,}405} \\ &\approx 0{,}48 \end{aligned}$$

Partie B

1. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(60;0{,}12)$.
2. $P(X=5)\approx 0{,}12$
3.

$$\begin{aligned} P(X\geq 1) &= 1-P(X=0) \\ &\approx 0{,}9995 \end{aligned}$$

4. Dans cette question, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;0{,}12)$ et on cherche n tel que $P(X\geq 1)\geq 0{,}99$.

$$\begin{aligned} P(X\geq 1)\geq 0{,}99 &\Leftrightarrow 1-P(X=0)\geq 0{,}99 \\ &\Leftrightarrow -P(X=0)\geq -0{,}01 \\ &\Leftrightarrow P(X=0)\leq 0{,}01 \\ &\Leftrightarrow \binom{n}{0}0{,}12^0(1-0{,}12)^{n-0}\leq 0{,}01 \\ &\Leftrightarrow 0{,}88^n\leq 0{,}01 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(0{,}88^n\right)\leq \ln(0{,}01) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0{,}88)\leq \ln(0{,}01) \\ &\Leftrightarrow n\geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}88)} \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}88)}\approx 36{,}02$.
Donc un employé doit effectuer au moins 37 appels par jour pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une souscription soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 4 — 7 points

Principaux domaines abordés : Suites

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.
Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une basse de 5% de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.
  On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3\,000$.

/0,5 1. Justifier que $u_1 = 2\,926$.

/0,5 2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.

/0,5 3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2554

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule **C2** afin d'obtenir, par étirement vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

/1 4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1\,520$.

/1 (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

/0,5 (c) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

5. On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,520$.

/0,5 (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

/0,5 (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520$.

/0,5 (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

/0,5 6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve maritime sera inférieur à 2 000.

```
n = 0
u = 3000
while ... :
    n = ...
    u = ...
```

/1 7. La réserve maritime fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

1. $3\,000 + 80 = 3080$.
   $3\,080 \times 0{,}95 = 2\,926$.

2.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n + 80) \times 0{,}95 \\ &= 0{,}95u_n + 0{,}95 \times 80 \\ &= 0{,}95u_n + 76 \end{aligned}$$

3. « = (B2+80)*0.95 »
4. (a) Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $u_n \geq 1\ 520$ ».
   - Initialisation : $u_0 = 3\ 000 \geq 1\ 520$ Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

     $$\begin{aligned} u_n \geq 1\ 520 &\Rightarrow 0{,}95u_n \geq 0{,}95 \times 1\ 520 \\ &\Rightarrow 0{,}95u_n + 76 \geq 0{,}95 \times 1\ 520 + 76 \\ &\Rightarrow u_{n+1} \geq 1\ 520 \end{aligned}$$

     Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : $\mathcal{P}_0$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 0.
     Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

   (b)

   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0{,}95u_n + 76 - u_n \\ &= -0{,}05u_n + 76 \end{aligned}$$

   Or : $u_n \geq 1\ 520 \Leftrightarrow -0{,}05 \times u_n \leq -0{,}051\ 520 \Leftrightarrow -0{,}05u_n \leq -76$ D'où :

   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -0{,}05u_n + 76 \\ &\leq -76 + 76 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Donc (u_n) est décroissante.

   (c) (u_n) est décroissante et minorée par 1 520, donc (u_n) converge.
5. (a)

   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1\ 520 \\ &= 0{,}95u_n + 76 - 1\ 520 \\ &= 0{,}95u_n - 1\ 444 \\ &= 0{,}95\left(u_n - \frac{1\ 444}{0{,}95}\right) \\ &= 0{,}95(u_n - 1\ 520) \\ &= 0{,}95v_n \end{aligned}$$

   Donc (v_n) est géométrique de raison 0,95.
   $v_0 = u_0 - 1\ 520 = 3\ 000 - 1\ 520 = 1\ 480$.

   (b) On déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$v_n = 1\ 480 \times 0{,}95^n$$

   $$\begin{aligned} v_n = u_n - 1\ 520 &\Leftrightarrow u_n = v_n + 1\ 520 \\ &\Leftrightarrow u_n = 1\ 480 \times 0{,}95^n + 1\ 520 \end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}95^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1\ 520$.

6.

```
n = 0
u = 3000
while u >= 2000 :
    n = n + 1
    u = 1480 * 0.95 ** n + 1520
```

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1\ 520 < 2\ 000$, donc oui la réserve fermera un jour.

$$\begin{aligned}
u_n \leq 2\ 000 &\Leftrightarrow 1\ 480 \times 0{,}95^n + 1\ 520 \leq 2\ 000\\
&\Leftrightarrow 1\ 480 \times 0{,}95^n \leq 480\\
&\Leftrightarrow 0{,}95^n \leq \frac{480}{1\ 480}\\
&\Leftrightarrow \ln\left(0{,}95^n\right) \leq \ln\left(\frac{480}{1\ 480}\right)\\
&\Leftrightarrow n\ln(0{,}95) \leq \ln\left(\frac{480}{1\ 480}\right)\\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{480}{1\ 480}\right)}{\ln(0{,}95)}
\end{aligned}$$

Or $\frac{\ln\left(\frac{480}{1\ 480}\right)}{\ln(0{,}95)} \approx 21{,}95$. Donc la réserve fermera en $2017 + 22$, soit en 2039.