BACCALAURÉAT BLANC

11 avril 2022

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9
Le candidat traite ***3 exercices*** *au choix parmi les 4 exercices proposés.*

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **7 points**

> Principaux domaines abordés :
> Convexité ; dérivation ; fonction exponentielle

On modélise le nombre de malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie, en fonction du nombre t de jours écoulés depuis l'apparition d'une maladie.
Cette modélisation est donnée par la fonction f définie sur $[0;60]$ par $f(t) = t^2\,\mathrm{e}^{-0,1t}$.

/1 1. Démontrer que $f'(t) = -2t(0,05t-1)\mathrm{e}^{-0,1t}$ pour tout $t \in [0;60]$.

/1 2. En déduire les variations de f sur $[0;60]$.

/1 3. Au bout de combien de jours le nombre de malades est-il maximal ? Préciser le nombre approximatif de malades ce jour-là.

/1 4. Démontrer que pour tout t de $[0;60]$, $f''(t) = 2\left(0,005t^2 - 0,2t + 1\right)\mathrm{e}^{-0,1t}$.

/1 5. (a) Étudier la convexité de f sur $[0;60]$.

/1 (b) Justifier que sur $[0;15]$, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet un unique point d'inflexion.

/1 (c) Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice, de l'abscisse de ce point d'inflexion.

1. $f(t) = u(t)v(t)$ avec $\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v(t) = \mathrm{e}^{-0,1t} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = 2t \\ v'(t) = -0,1\,\mathrm{e}^{-0,1t} \end{cases}$.
   Ainsi :
$$\begin{aligned} f'(t) &= u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \\ &= 2t \times \mathrm{e}^{-0,1t} + t^2 \times \left(-0,1\,\mathrm{e}^{-0,1t}\right) \\ &= -0,1t^2\,\mathrm{e}^{-0,1t} + 2t\,\mathrm{e}^{-0,1t} \\ &= -2t(0,05t-1)\mathrm{e}^{-0,1t} \end{aligned}$$

2. Pour tout $t \in [0;60]$, $\mathrm{e}^{-0,1t} > 0$.
   $-2t > 0 \Leftrightarrow t < 0$ et $0,05t - 1 > 0 \Leftrightarrow t > 20$.
   Ainsi :

t	0		20		60
$f'(t)$	0	+	0	−	
$f(t)$	0		$\approx 54,13$		$\approx 8,92$

3. Le nombre de malades est maximal au bout de 20 jours, et il y a alors approximativement 54 130 malades.

4. $f'(t) = (-0,1t^2 + 2t)\mathrm{e}^{-0,1t} = u(t)v(t)$ avec $\begin{cases} u(t) = -0,1t^2 + 2t \\ v(t) = \mathrm{e}^{-0,1t} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = -0,2t + 2 \\ v'(t) = -0,1\,\mathrm{e}^{-0,1t} \end{cases}$
   Donc :
$$\begin{aligned} f''(t) &= (-0,2t+2) \times \mathrm{e}^{-0,1t} + \left(-0,1t^2 + 2t\right) \times \left(-0,1\,\mathrm{e}^{-0,1t}\right) \\ &= 2\left(0,005t^2 - 0,2t + 1\right)\mathrm{e}^{-0,1t} \end{aligned}$$

5. (a) Pour tout $t \in [0;60]$, $\mathrm{e}^{-0,1t} > 0$.
Étudions le signe de $0,005t^2 - 0,2t + 1$.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-0,2)^2 - 4\times 0,005\times 1\\ &= 0,04 - 0,02\\ &= 0,02\end{aligned}$$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{2}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

$$\begin{aligned}t_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-(-0,2)-\frac{\sqrt{2}}{10}}{2\times 0,005}\\ &= \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{10}}{\frac{1}{100}}\\ &= 20 - 10\sqrt{2}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}t_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= 20 + 10\sqrt{2}\end{aligned}$$

On a ainsi :

t	0		$20-10\sqrt{2}$		$20+10\sqrt{2}$		60
$f''(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc f est :

- convexe sur $\left[0;20-10\sqrt{2}\right]$ et sur $\left[20+10\sqrt{2};60\right]$;
- concave sur $\left[20-10\sqrt{2};20+10\sqrt{2}\right]$.

(b) $20-10\sqrt{2} \approx 5,86$ et $20+10\sqrt{2} \approx 34,14$.
Il n'existe donc qu'une seule valeur de t en laquelle $f''(t)$ s'annule en changeant de signe sur $[0;15]$: $20-10\sqrt{2}$.
$\mathcal{C}_f$ admet donc un unique point d'inflexion sur $[0;15]$. Il s'agit du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $20-10\sqrt{2}$.

(c) $20-10\sqrt{2} \approx 5,86 \approx 6$.
Donc au bout d'environ 6 jours, la vitesse de propagation de la maladie diminue.

Exercice 2 — 7 points

Principaux domaines abordés :
Probabilités ; variables aléatoires ; succession d'épreuves indépendantes

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.
Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une certaine partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible et elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté. Il est possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.

Une étude, menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale, a permis de constater que :

- 40% de la population a été vaccinée ;
- 8% des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20% de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

- V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;
- G : « la personne a contracté la grippe ».

/1 1. (a) Donner la probabilité de l'évènement G.
(b) Dresser un arbre pondéré représentant la situation.

/1 2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

/2 3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.
Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.
Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix revient à effectuer n tirages successifs indépendants et avec remise.
On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

/1 1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

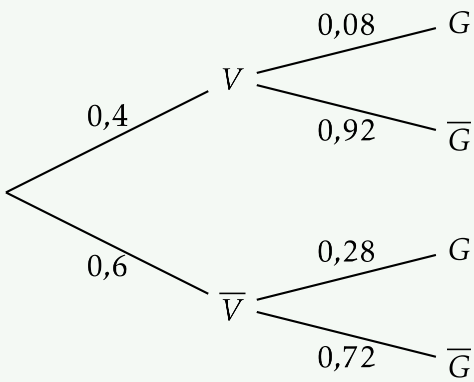
/1 (a) Déterminer la probabilité qu'exactement 15 personnes parmi les 40 personnes interrogées soient vaccinées.

/1 (b) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

Partie A

1. (a) $\boxed{P(G) = 0{,}2}$.

(b)



2.

$$\begin{aligned} P(V \cap G) &= P(V) \times P_V(G) \\ &= 0{,}4 \times 0{,}08 \\ &= \boxed{0{,}032} \end{aligned}$$

3. On sait que $P_{\overline{V}}(G) = \frac{P\left(\overline{V} \cap G\right)}{P\left(\overline{V}\right)}$.

   D'après la formule des probabilités totales : $P(G) = P(V \cap G) + P(\overline{V} \cap G)$.
   D'où : $P(\overline{V} \cap G) = P(G) - P(V \cap G) = 0{,}2 - 0{,}032 = 0{,}168$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} P_{\overline{V}}(G) &= \frac{P\left(\overline{V} \cap G\right)}{P\left(\overline{V}\right)} \\ &= \frac{0{,}168}{0{,}6} \\ &= 0{,}28 \end{aligned}$$

Partie B

1. $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n\,;\,0{,}4)}$.
2. (a) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(40\,;\,0{,}4)$.

$$\begin{aligned} P(X = 15) &= \binom{40}{15} \times 0{,}4^{15} \times (1 - 0{,}4)^{40-15} \\ &\approx \boxed{0{,}1228} \end{aligned}$$

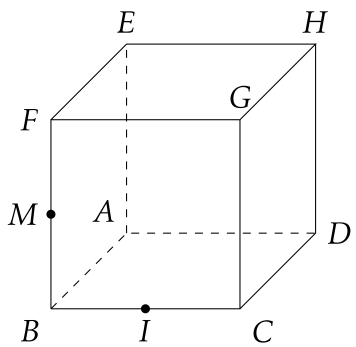
   (b)

$$\begin{aligned} P(X \geq 20) &= 1 - P(X < 20) \\ &= 1 - P(X \leq 19) \\ &\approx 1 - 0{,}8702 \\ &= \boxed{0{,}1298} \end{aligned}$$

Exercice 3 **7 points**

Principaux domaines abordés :
Géométrie dans l'espace rapporté à une repère orthonormé ; orthogonalité dans l'espace

Soit $ABCDEFGH$ un cube.
Le point M est le milieu de $[BF]$ et I est le milieu de $[BC]$.
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A;\, \overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AD},\, \overrightarrow{AE}\right)$.
On a ainsi $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$.



/1 1. (a) Justifier que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MED).

/1 (b) En déduire une équation cartésienne du plan (MED).

/1 2. Démontrer que I appartient au plan (MED).

/1 3. Déterminer une réprésentation paramétrique de la droite Δ passant par G et orthogonale à (MED).

/1 4. (a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal K du point G sur le plan (MED).

/1 (b) En déduire la distance GK.

/1 5. On admet que l'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère $MEDI$ est égale à $\frac{9}{8}$ unités d'aire.
Calculer le volume V de la pyramide $GMEDI$.
On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

1. (a) M est le milieu de $[BF]$, donc $M\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$.
On calcule facilement $\overrightarrow{ME}\begin{pmatrix}-1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.
On démontre alors que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{ME} = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$ et donc que $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MD}$.
$\vec{n}$ est donc un vecteur normal au plan (MED).
   (b) On en déduit que $x+2y+2z+d = 0$ est une équation cartésienne de (MED), avec $d \in \mathbb{R}$.
De plus :
$$\begin{aligned} E \in (MED) &\Leftrightarrow x_E + 2y_E + 2z_E + d = 0 \\ &\Leftrightarrow d = -2 \end{aligned}$$
On en déduit que (MED) admet pour équation cartésienne $\boxed{x + 2y + 2z - 2 = 0}$.
2. On vérifie que les coordonnées de I vérifient l'équation cartésienne de (MED).
3. Δ passe par G.
De plus Δ est orthogonale à (MED), donc un vecteur normal à (MED) est un vecteur directeur de Δ. Donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ. On en déduit la représentation paramétrique suivante de Δ :
$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$
4. (a) Soit $K(x;y;z)$ le projeté orthogonale de G sur (MED).
K est le point d'intersection de Δ et (MED).
Donc ses coordonnées vérifient $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \\ x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$.
Or :
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \\ x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 + t + 2(1 + 2t) + 2(1 + 2t) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 9t = -3$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

On en déduit $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ et $z = \frac{1}{3}$.
Donc $K\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

(b)

$$\begin{aligned} GK &= \sqrt{(x_K - x_G)^2 + (y_K - y_G)^2 + (z_K - z_G)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

5. En considérant le quadrilatère $MEDI$ comme base de la pyramide $GMEDI$, la hauteur issue de G a pour longueur GK.
Ainsi :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \frac{9}{8} \times 1 \\ &= \frac{3}{8} \\ &\approx 0{,}38 \end{aligned}$$

EXERCICE 4 **7 points**

Principaux domaines abordés :
Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$; dérivation

Soit f la fonction définie sur $[0;4]$ par :

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que la suite (u_n) est bien définie.

/0,5 1. Calculer u_1.

2. On a calculé avec un tableur les premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	1,57143
4	2	1,20513
5	3	1,07882
6	4	1,03104
7	5	1,01234
8	6	1,00492

/0,5 (a) Quelle formule a été saisie dans la cellule **B3** pour obtenir par recopie vers le bas les termes de la suite (u_n) ?

/0,5 (b) Conjecturer le sens de variation de (u_n) et la valeur de son éventuelle limite.

/1 3. (a) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0;4]$.

/1 (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4$.

/2 4. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$$

/1 (b) En déduire que (u_n) est convergente.

/0,5 (c) Soit l la limite de (u_n). On admet que l vérifie $f(l) = l$.
Démontrer la conjecture précédemment émise sur la limite de la suite (u_n).

1. $u_1 = f(u_0) = \frac{3\times 3+2}{3+4} = \frac{11}{7}$.
2. (a) « B3 = (2+3*B2)/(4+B2) »
   (b) La suite (u_n) semble décroissante et converger vers 1.
3. (a) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x+2 \\ v(x) = x+4 \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.
   On en déduit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{3\times(x+4) - (3x+2)\times 1}{(x+4)^2} \\ &= \frac{10}{(x+4)^2} \end{aligned}$$

   Or pour tout $x \in [0;4]$, $\frac{10}{(x+4)^2} > 0$, donc f est croissante sur $[0;4]$.

(b) $f(0)=\frac{1}{2}$ et $f(4)=\frac{7}{4}$.
De plus, f est strictement croissante sur $[0;4]$.
On en déduit que pour tout $x\in[0;4]$, $f(x)\in[0;4]$.
Autrement dit, $[0;4]$ est stable par f.
$u_0=3$, donc $u_0\in[0;4]$.
Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$, on en déduit que $u_n\in[0;4]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
NB : on peut aussi faire un raisonnement par récurrence.

4. (a) Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $1\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 3$ ».
   - Initialisation : $u_0=3$ et $u_1=\frac{11}{7}$.
     Donc $1\leq u_1\leq u_0\leq 3$.
     Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n\geq 0$.
     f est strictement croissante sur $[0;4]$, donc :

$$\begin{aligned}1\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 3 &\Rightarrow f(1)\leq f(u_{n+1})\leq f(u_n)\leq f(3)\\ &\Rightarrow 1\leq u_{n+2}\leq u_{n+1}\leq \frac{11}{7}\\ &\Rightarrow 1\leq u_{n+2}\leq u_{n+1}\leq 3\end{aligned}$$

     Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : $\mathcal{P}_0$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 0.
     Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\geq 0$.

(b) D'après la question précédente, (u_n) est décroissante et minorée par 1.
D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que (u_n) converge.

(c)

$$\begin{aligned}f(l)=l &\Leftrightarrow \frac{2+3l}{4+l}=l\\ &\Leftrightarrow 2+3l=l(4+l)\quad \forall l\neq -4\\ &\Leftrightarrow 2+3l=4l+l^2\\ &\Leftrightarrow l^2+l-2=0\end{aligned}$$

$\Delta=1^2-4\times 1\times(-2)=9$.
$\Delta>0$, donc l^2+l-2 admet deux racines réelles.

$$\begin{aligned}l_1&=\frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1}\\ &=\frac{-1-3}{2}\\ &=-2\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}l_2&=\frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1}\\ &=\frac{-1+3}{2}\\ &=1\end{aligned}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n\leq 4$, donc $l=-2$ est impossible.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.