

Prénom : ...
 Nom : ...
 Classe : Terminale



— DS de Mathématiques (Sujet A) —

Le sujet est à rendre avec la copie.

*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	5	5
Score		

Exercice 1 5 pts

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

/0,5 1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

/0,5 2. (a) Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

(b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .

/1 3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.

/1 (b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

/1 (c) Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - n$

/0,5 (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

/0,5 (b) En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{7}{4}$.

Pour $n = 1$, $u_2 = u_{1+1} = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}$.

2. (a) La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B est :
 $= 3/4 * B2 + 1/4 * A2 + 1$.

(b) La suite (u_n) semble croissante.

3. (a) Soit \mathcal{P}_n la propriété : $n \leq u_n \leq n + 1$.

• **Initialisation**

Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.

• **Hérédité**

On suppose \mathcal{P}_n vraie, c'est-à-dire : $n \leq u_n \leq n + 1$ (hypothèse de récurrence).

$$n \leq u_n \leq n + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}n \leq \frac{3}{4}u_n \leq \frac{3}{4}(n + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leq \frac{3}{4}(n + 1) + \frac{1}{4}n$$

$$\Leftrightarrow n \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leq n + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow n + 1 \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leq n + \frac{3}{4} + 1 \Leftrightarrow n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + \frac{7}{4}$$

donc $n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 2$.

On a démontré que la propriété était vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.

(b) D'après la question précédente :

• Pour tout n , $n \leq u_n \leq n + 1$ donc $n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 2$ donc

$n \leq u_n \leq n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 2$ d'où on tire $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.

• Pour tout n , $n \leq u_n$; or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(c) Pour tout n , $n \leq u_n \leq n + 1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n + 1}{n}$ c'est-à-dire :

$$1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4. (a) Pour tout n , $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}(v_n + n) - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n$$

$$v_0 = u_0 - 0 = 1$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

(b) On en déduit que, pour tout n , $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Prénom : ...
 Nom : ...
 Classe : Terminale



— DS de Mathématiques (Sujet B) —

Le sujet est à rendre avec la copie.

*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	5	5
Score		

Exercice 1 5 pts

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

- /0,5 1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

- /0,5 2. (a) Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B?
 (b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .
- /1 3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.
 /1 (b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .
 /1 (c) Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - n$

- /0,5 (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
 /0,5 (b) En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{7}{4}$.

Pour $n = 1$, $u_2 = u_{1+1} = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}$.

2. (a) La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B est :
 $= 3/4 * B2 + 1/4 * A2 + 1$.

(b) La suite (u_n) semble croissante.

3. (a) Soit \mathcal{P}_n la propriété : $n \leq u_n \leq n + 1$.

• **Initialisation**

Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.

• **Hérédité**

On suppose \mathcal{P}_n vraie, c'est-à-dire : $n \leq u_n \leq n + 1$ (hypothèse de récurrence).

$$n \leq u_n \leq n + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}n \leq \frac{3}{4}u_n \leq \frac{3}{4}(n + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leq \frac{3}{4}(n + 1) + \frac{1}{4}n$$

$$\Leftrightarrow n \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leq n + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow n + 1 \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leq n + \frac{3}{4} + 1 \Leftrightarrow n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + \frac{7}{4}$$

donc $n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 2$.

On a démontré que la propriété était vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.

(b) D'après la question précédente :

• Pour tout n , $n \leq u_n \leq n + 1$ donc $n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 2$ donc

$n \leq u_n \leq n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 2$ d'où on tire $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.

• Pour tout n , $n \leq u_n$; or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(c) Pour tout n , $n \leq u_n \leq n + 1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n + 1}{n}$ c'est-à-dire :

$$1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4. (a) Pour tout n , $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}(v_n + n) - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n$$

$$v_0 = u_0 - 0 = 1$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

(b) On en déduit que, pour tout n , $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.