Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

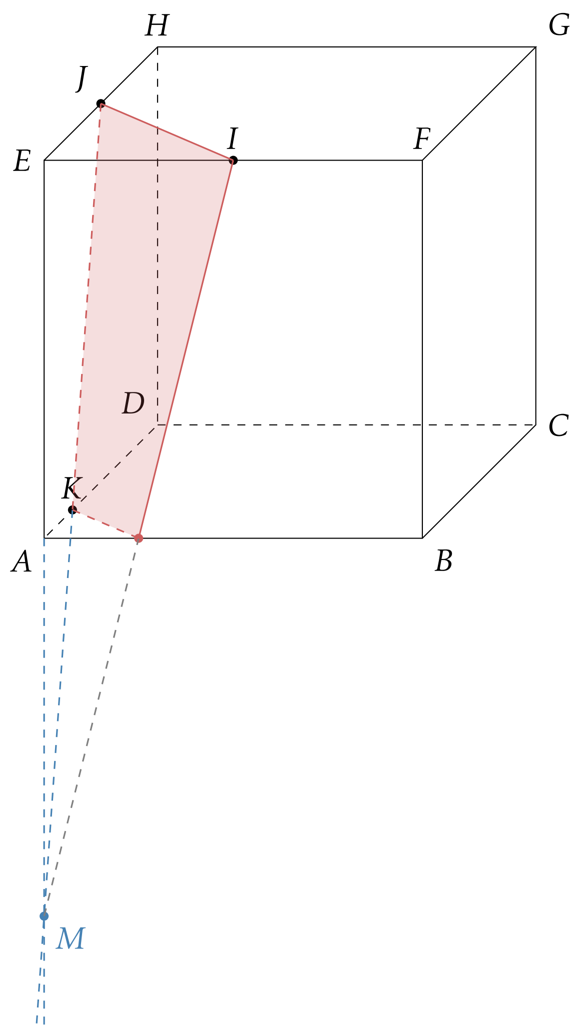
DS de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	5	5
Score		

Exercice 1 .... 5 pts

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1.
On note I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu du segment $[EH]$ et K le point du segment $[AD]$ tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.



Partie A

Dans cette partie, les constructions demandées seront effectuées sans justification sur la figure, en veillant tout de même à laisser les traits de construction apparents.

/0,5 1. Le plan (IJK) coupe la droite (AE) en un point qu'on note M. Construire le point M.

/0,5 2. Construire la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

/1,5 1. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

/0,5 (b) En déduire une équation cartésienne de (IJK).

2. On note Δ la droite passant par le point E et orthogonale au plan (IJK).

/1 (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

/0,5 (b) Calculer les coordonnées du point L, intersection de la droite Δ et du plan (IJK).

/0,5 (c) Déterminer la distance du point E au plan (IJK).

Partie B :
$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$.

1. (a) On a $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $J\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ et $K\left(0;\frac{1}{4};0\right)$.
On en déduit $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$.
On montre que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{KJ} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{KI} = 0$.
On en déduit que $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{KJ}$.
Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

(b) $\vec{n}$ est normal au plan (IJK).
Donc $-4x - 4y + z + d = 0$ est une équation cartésienne de (IJK), avec $d \in \mathbb{R}$.
Or $I \in (IJK)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus.

$$\begin{aligned} -4x_I - 4y_I + z_I + d = 0 &\Leftrightarrow -4 \times \frac{1}{2} - 4 \times 0 + 1 + d = 0 \\ &\Leftrightarrow -2 + 1 + d = 0 \\ &\Leftrightarrow d = 1 \end{aligned}$$

Donc $-4x - 4y + z + 1 = 0$ est une équation cartésienne de (IJK).

2. (a) Δ est orthogonale au plan (IJK), donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ.
De plus, Δ passe par $E(0;0;1)$.
On en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est :

$$\Delta : \begin{cases} x = -4t \\ y = -4t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

3. Les coordonnées de L sont solution du système $\begin{cases} x = -4t \\ y = -4t \\ z = t + 1 \\ -4x - 4y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

On a donc $-4 \times (-4t) - 4 \times (-4t) + t + 1 + 1 = 0$.
On en déduit $t = -\frac{2}{33}$. On a donc $L\left(\frac{8}{33}; \frac{8}{33}; \frac{31}{33}\right)$.

4. La distance du point E au plan (IJK) est égale à la distance du point E à son projeté orthogonal sur le plan (IJK), qui est le point L.
   On calcule donc la distance EL à l'aide de la formule :

   $$EL = \sqrt{(x_L - x_E)^2 + (y_L - y_E)^2 + (z_L - z_E)^2}$$

   On trouve $EL = \frac{2\sqrt{33}}{33} \approx 0{,}35$.

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

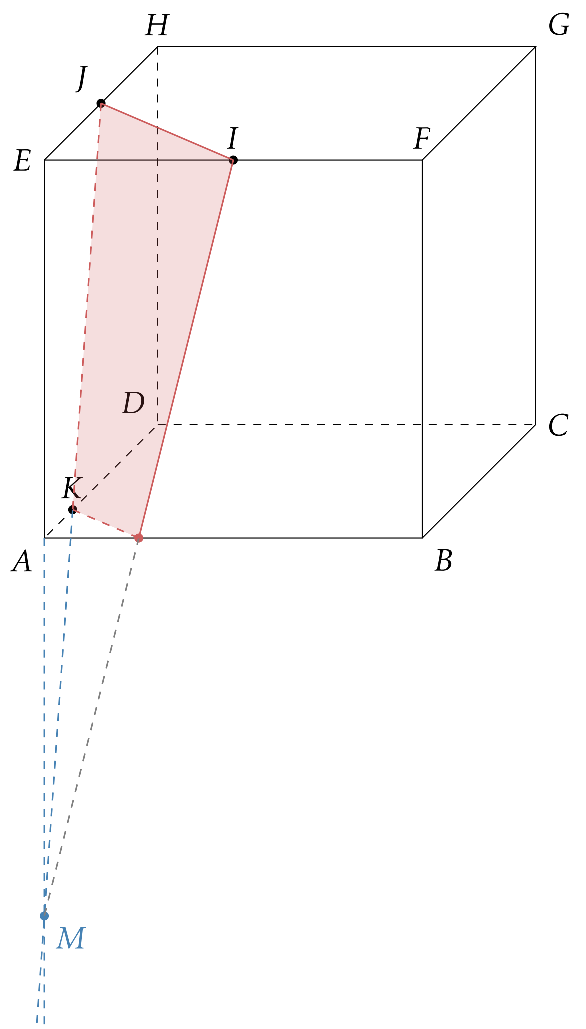
DS de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice est* ***autorisé****.*
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	5	5
Score		

Exercice 1 .... 5 pts

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1.
On note I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu du segment $[EH]$ et K le point du segment $[AD]$ tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.



Partie A

Dans cette partie, les constructions demandées seront effectuées sans justification sur la figure, en veillant tout de même à laisser les traits de construction apparents.

/0,5 1. Le plan (IJK) coupe la droite (AE) en un point qu'on note M. Construire le point M.

/0,5 2. Construire la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

/1,5 1. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\-4\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

/0,5 (b) En déduire une équation cartésienne de (IJK).

2. On note Δ la droite passant par le point E et orthogonale au plan (IJK).

/1 (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

/0,5 (b) Calculer les coordonnées du point L, intersection de la droite Δ et du plan (IJK).

/0,5 (c) Déterminer la distance du point E au plan (IJK).

Partie B :
$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$.

1. (a) On a $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $J\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ et $K\left(0;\frac{1}{4};0\right)$.
   On en déduit $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{4}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}\\1\end{pmatrix}$.
   On montre que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{KJ}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{KI}=0$.
   On en déduit que $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{KJ}$.
   Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

   (b) $\vec{n}$ est normal au plan (IJK).
   Donc $-4x-4y+z+d=0$ est une équation cartésienne de (IJK), avec $d\in\mathbb{R}$.
   Or $I\in(IJK)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus.

$$\begin{aligned}-4x_I-4y_I+z_I+d=0 &\Leftrightarrow -4\times\frac{1}{2}-4\times 0+1+d=0\\ &\Leftrightarrow -2+1+d=0\\ &\Leftrightarrow d=1\end{aligned}$$

   Donc $-4x-4y+z+1=0$ est une équation cartésienne de (IJK).

2. (a) Δ est orthogonale au plan (IJK), donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ.
   De plus, Δ passe par $E(0;0;1)$.
   On en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est :

$$\Delta:\begin{cases}x=-4t\\y=-4t\\z=t+1\end{cases}$$

3. Les coordonnées de L sont solution du système $\begin{cases}x=-4t\\y=-4t\\z=t+1\\-4x-4y+z+1=0\end{cases}$.

   On a donc $-4\times(-4t)-4\times(-4t)+t+1+1=0$.
   On en déduit $t=-\frac{2}{33}$. On a donc $L\left(\frac{8}{33};\frac{8}{33};\frac{31}{33}\right)$.

4. La distance du point E au plan (IJK) est égale à la distance du point E à son projeté orthogonal sur le plan (IJK), qui est le point L.
   On calcule donc la distance EL à l'aide de la formule :

$$EL = \sqrt{(x_L - x_E)^2 + (y_L - y_E)^2 + (z_L - z_E)^2}$$

   On trouve $EL = \frac{2\sqrt{33}}{33} \approx 0{,}35$.