Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet A)

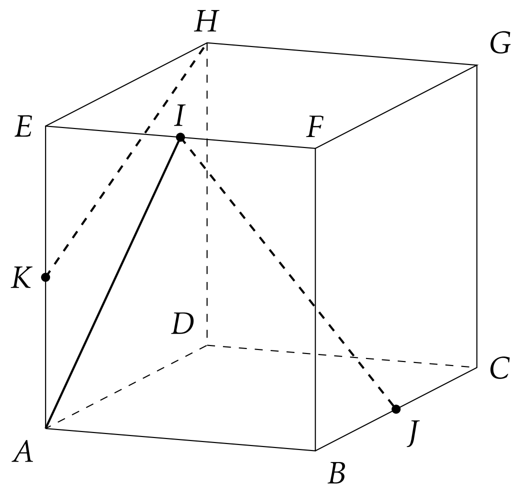
Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	5	5
Score		

Exercice 1 .... 5 pts

Les questions 1. à 5. de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Méthode 1 :
Dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

$$A(0;0;0)\ ;\ B(1;0;0)\ ;\ C(1;1;0)\ ;\ D(0;1;0)\ ;\ E(0;0;1)\ ;\ F(1;0;1)\ ;\ G(1;1;1)\ ;\ H(0;1;1)$$

et :

$$I(0{,}5;0;1)\ ;\ J(1;0{,}5;0)\ ;\ K(0;0;0{,}5)$$

On peut alors calculer $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0{,}5\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KH}\begin{pmatrix}0\\1\\0{,}5\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KH}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.

Méthode 2 :
$(KH) \subset (AED)$ et $(AI) \subset (AEF)$.
Or puisque $ABCDEFGH$ est un cube, (AED) et (AEF) sont deux plans orthogonaux.
Ainsi, pour que $d_1 \subset (AED)$ et $(d_2) \subset (AEF)$ soient parallèles, il faudrait que d_1 et d_2 soient toutes deux confondues avec l'intersection des deux plans.
Or (KH) et (AI) ne sont pas l'intersection de (AED) et (AEF) (il s'agit de la droite (AE)).
Donc (KH) et (AI) ne sont pas parallèles.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A} ; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

2. (a) Donner les coordonnées des points I et J.

   $I(0{,}5;0;1)$ et $J(1;0{,}5;0)$.

   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont coplanaires.

   On calcule : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
   On voit facilement que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{AE}$ (on peut autrement résoudre un système pour trouver les deux coefficients).
   On en déduit que $\overrightarrow{IJ}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$, et donc que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+t \\ y &=& 8-2t \\ z &=& -2+3t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4+t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 8+2t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

   d_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.
   On voit que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires.
   Donc d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

   On déduit de l'équation cartésienne donnée du plan $\mathcal{P}$ que $\mathcal{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$.
   Or on a vu que $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_2.

   $$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_2} &= 1\times 1 + 3\times 1 + (-2)\times 2\\ &= 1+3-4\\ &= 0\end{aligned}$$

   $\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_2} = 0$, donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux.
   On en déduit que d_2 est parallèle à $\mathcal{P}$.

5. Montrer que le point L$(4 ; 0 ; 3)$ est le projeté orthogonal du point M$(5 ; 3 ; 1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

   Par le calcul, on montre que $\overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$.
   On voit que $\overrightarrow{LM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.
   Donc (LM) est orthogonale à $\mathcal{P}$.
   On montre par ailleurs que $x_L + 3y_L - 2z_L + 2 = 0$, ce qui prouve que L appartient au plan

$\mathcal{P}$ (ses coordonnées vérifie l'équation du plan).
On en déduit que L est bien le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet B)

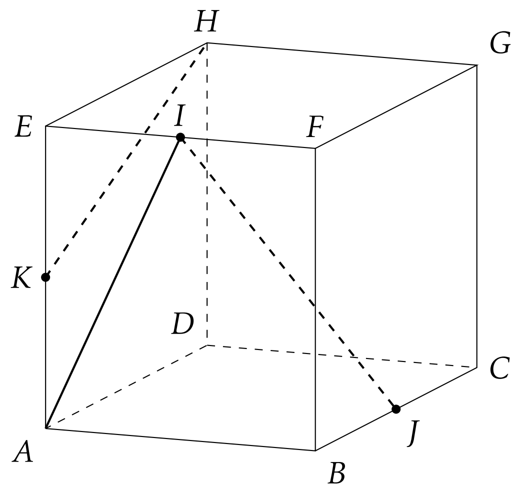
Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	5	5
Score		

Exercice 1 .... 5 pts

Les questions 1. à 5. de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Méthode 1 :
Dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

$$A(0;0;0)\ ;\ B(1;0;0)\ ;\ C(1;1;0)\ ;\ D(0;1;0)\ ;\ E(0;0;1)\ ;\ F(1;0;1)\ ;\ G(1;1;1)\ ;\ H(0;1;1)$$

et :

$$I(0,5;0;1)\ ;\ J(1;0,5;0)\ ;\ K(0;0;0,5)$$

On peut alors calculer $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0,5\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KH}\begin{pmatrix}0\\1\\0,5\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KH}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.

Méthode 2 :
$(KH) \subset (AED)$ et $(AI) \subset (AEF)$.
Or puisque $ABCDEFGH$ est un cube, (AED) et (AEF) sont deux plans orthogonaux.
Ainsi, pour que $d_1 \subset (AED)$ et $(d_2) \subset (AEF)$ soient parallèles, il faudrait que d_1 et d_2 soient toutes deux confondues avec l'intersection des deux plans.
Or (KH) et (AI) ne sont pas l'intersection de (AED) et (AEF) (il s'agit de la droite (AE)).
Donc (KH) et (AI) ne sont pas parallèles.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

2. (a) Donner les coordonnées des points I et J.

   $I(0{,}5;0;1)$ et $J(1;0{,}5;0)$.

   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont coplanaires.

   On calcule : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
   On voit facilement que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{AE}$ (on peut autrement résoudre un système pour trouver les deux coefficients).
   On en déduit que $\overrightarrow{IJ}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$, et donc que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+t \\ y &=& 8-2t \\ z &=& -2+3t \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4+t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 8+2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

   d_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.
   On voit que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires.
   Donc d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

   On déduit de l'équation cartésienne donnée du plan $\mathcal{P}$ que $\mathcal{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$.
   Or on a vu que $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_2.

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u_2} &= 1\times 1 + 3\times 1 + (-2)\times 2\\ &= 1+3-4\\ &= 0\end{aligned}$$

   $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u_2} = 0$, donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux.
   On en déduit que d_2 est parallèle à $\mathcal{P}$.

5. Montrer que le point L$(4\,;\,0\,;\,3)$ est le projeté orthogonal du point M$(5\,;\,3\,;\,1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

   Par le calcul, on montre que $\overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$.
   On voit que $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires.
   Donc (LM) est orthogonale à $\mathcal{P}$.
   On montre par ailleurs que $x_L + 3y_L - 2z_L + 2 = 0$, ce qui prouve que L appartient au plan

$\mathcal{P}$ (ses coordonnées vérifie l'équation du plan).
On en déduit que L est bien le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.