

Prénom : ...
 Nom : ...
 Classe : Terminale



— DS de Mathématiques (Sujet A) —

Le sujet est à rendre avec la copie.

*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*

*Il est rappelé que la **qualité de la rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	16	16
Score		

Exercice 1 16 pts

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)$$

On admet que f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Partie A

- /2 1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
- /2 2. (a) Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$.
- /2 (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- /3 1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- /2 2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note l la limite de la suite (u_n) .

On admet que $f(l) = l$.

L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de l .

On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$, où $x_0 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0,215$ et $g(x_0) \approx 0,088$, en arrondissant à 10^{-3} près.

x	0	x_0	$+\infty$
$g(x)$	0	$g(x_0)$	$-\infty$

- /2 1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α .

- /1 2. (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à 0,01 près.

```
x = 0
g = 0
while ... :
    x = x + 0.01
    g = ...
```

- /1 (b) Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.
- /1 3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite l de la suite (u_n) .

Prénom : ...
 Nom : ...
 Classe : Terminale



— DS de Mathématiques (Sujet B) —

Le sujet est à rendre avec la copie.

*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*

*Il est rappelé que la **qualité de la rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	16	16
Score		

Exercice 1 16 pts

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)$$

On admet que f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Partie A

- /2 1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
- /2 2. (a) Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$.
- /2 (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- /3 1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- /2 2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note l la limite de la suite (u_n) .

On admet que $f(l) = l$.

L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de l .

On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$, où $x_0 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0,215$ et $g(x_0) \approx 0,088$, en arrondissant à 10^{-3} près.

x	0	x_0	$+\infty$
$g(x)$	0	$g(x_0)$	$-\infty$

(Diagram showing arrows from 0 to $g(x_0)$ and from $g(x_0)$ to $-\infty$)

- /2 1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α .

- /1 2. (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à 0,01 près.

```
x = 0
g = 0
while ... :
    x = x + 0.01
    g = ...
```

- /1 (b) Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.
- /1 3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite l de la suite (u_n) .