Prénom : …
Nom : …
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	16	16
Score		

Exercice 1 .... 16 pts

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)$$

On admet que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Partie A

/2 1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

/2 2. (a) Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$.

/2 (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

1.
2. (a) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

/3 1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

/2 2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note l la limite de la suite (u_n).
On admet que $f(l) = l$.
L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de l.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$, où $x_0 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}215$ et $g(x_0) \approx 0{,}088$, en arondissant à 10^{-3} près.

x	0		x_0		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

/2 1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.

/1 2. (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à 0,01 près.

```
x = 0
g = 0
while g >= 0 :
    x = x + 0.01
    g = log((3 * x + 1)/(x + 1)) - x
```

/1 (b) Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

/1 3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite l de la suite (u_n).

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice est* ***autorisé****.*
Il est rappelé que la qualité de la ***rédaction****, la* ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	16	16
Score		

Exercice 1 .... 16 pts

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)$$

On admet que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Partie A

/2 1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

/2 2. (a) Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$.

/2 (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

1.
2. (a) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

/3 1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

/2 2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note l la limite de la suite (u_n).
On admet que $f(l) = l$.
L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de l.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$, où $x_0 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}215$ et $g(x_0) \approx 0{,}088$, en arondissant à 10^{-3} près.

x	0		x_0		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

/2 1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.

/1 2. (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à 0,01 près.

```
x = 0
g = 0
while g >= 0 :
    x = x + 0.01
    g = log((3 * x + 1)/(x + 1)) - x
```

/1 (b) Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

/1 3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite l de la suite (u_n).