Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet A)

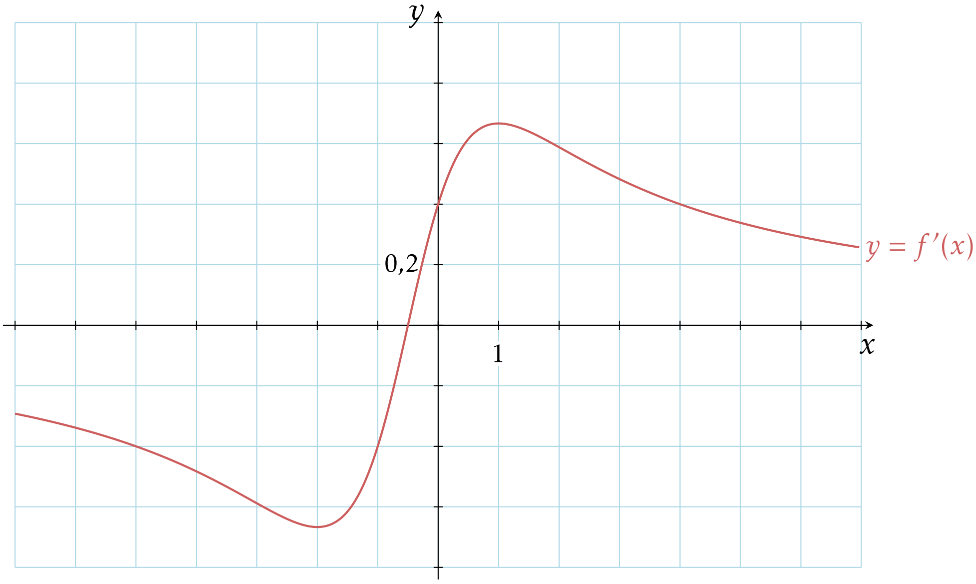
Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	5	5
Score		

Exercice 1 .... 5 pts

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2. (a) Donner les variations de la fonction dérivée f'.
   (b) En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

1. On lit $f'(0) = 0{,}4 = \dfrac{2}{5}$.
2. (a) D'après la figure :
   - f' est croissante sur $]-2;1]$.
   - f' est décroissante sur $]-\infty;-2]$ et sur $[1;+\infty[$.

   (b) f est convexe sur l'intervalle $[-2;1]$.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

   (b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x + \dfrac{5}{2} = +\infty$, d'où par composition de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + x + \frac{5}{2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
2. On a $f(x) = \ln u(x)$, avec $u(x) = x^2 + x + \dfrac{5}{2}$.

   u étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour le trinôme $x^2 + x + \dfrac{5}{2}$, $\Delta = 1 - 10 = -9 < 0$, donc

   $x^2 + x + \dfrac{5}{2} > 0$ quel que soit le réel x.
   La fonction $\ln u$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $(\ln u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$.

   Conclusion : quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $2x + 1$.
   $2x + 1 > 0 \iff 2x > -1 \iff x > -\frac{1}{2}$.
   $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{10}{4}\right) = \ln\left(\frac{9}{4}\right)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\left(\frac{9}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) $\ln\left(\frac{9}{4}\right) \approx 0{,}81 < 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   De plus, f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.
   Donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

(b) $\alpha \approx 1{,}8$.

5. La fonction a un point d'inflexion si en ce point sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe.
   Le signe de $f''(x)$ est déterminé par le signe de son numérateur.
   On étudie donc le signe de $-2x^2 - 2x + 4$.
   Ce trinôme a deux racines : -2 et 1.
   Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On constate que la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en -2 et en 1. La courbe a donc deux points d'inflexion.

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

DS de Mathématiques (Sujet B)

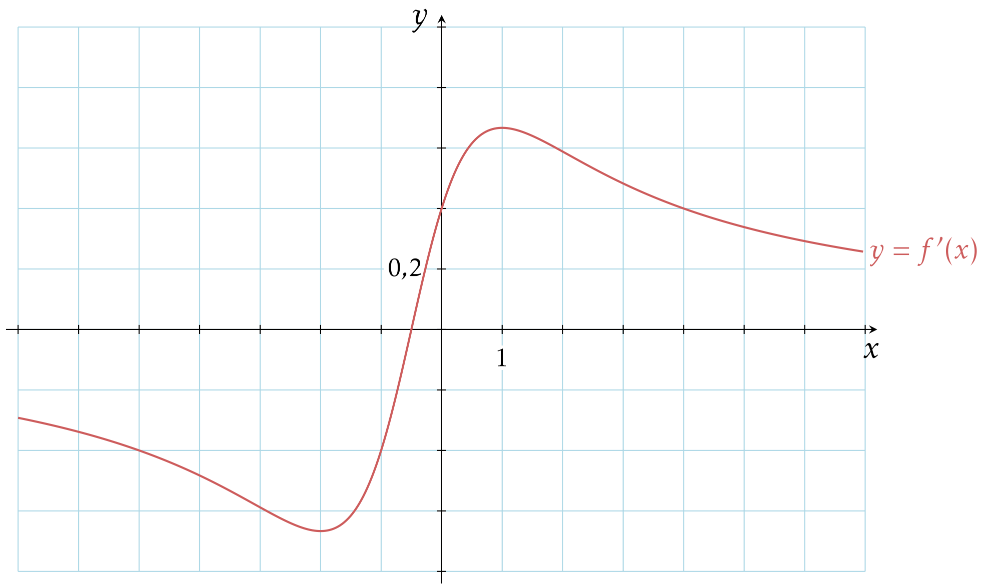
Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	5	5
Score		

Exercice 1 .... 5 pts

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2. (a) Donner les variations de la fonction dérivée f'.
   (b) En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

1. On lit $f'(0) = 0{,}4 = \dfrac{2}{5}$.
2. (a) D'après la figure :
   - f' est croissante sur $]-2;1]$.
   - f' est décroissante sur $]-\infty;-2]$ et sur $[1;+\infty[$.

   (b) f est convexe sur l'intervalle $[-2;1]$.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

   (b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x + \dfrac{5}{2} = +\infty$, d'où par composition de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + x + \frac{5}{2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
2. On a $f(x) = \ln u(x)$, avec $u(x) = x^2 + x + \dfrac{5}{2}$.

   u étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour le trinôme $x^2 + x + \dfrac{5}{2}$, $\Delta = 1 - 10 = -9 < 0$, donc

   $x^2 + x + \dfrac{5}{2} > 0$ quel que soit le réel x.
   La fonction $\ln u$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $(\ln u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$.

   Conclusion : quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $2x+1$.
   $2x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.
   $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{10}{4}\right) = \ln\left(\frac{9}{4}\right)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\left(\frac{9}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) $\ln\left(\frac{9}{4}\right) \approx 0{,}81 < 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   De plus, f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.
   Donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

(b) $\alpha \approx 1{,}8$.

5. La fonction a un point d'inflexion si en ce point sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe.
   Le signe de $f''(x)$ est déterminé par le signe de son numérateur.
   On étudie donc le signe de $-2x^2 - 2x + 4$.
   Ce trinôme a deux racines : -2 et 1.
   Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On constate que la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en -2 et en 1. La courbe a donc deux points d'inflexion.