Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

# DS de Mathématiques (Sujet A)

***Le sujet est à rendre avec la copie.***
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

| Exercice | 1 | 2 | Total |
|---|---|---|---|
| Points | 14 | 6 | 20 |
| Score | | | |

## Exercice 1 ........ 14 pts

*(Inspiré du sujet 2 Baccalauréat Polynésie 2 juin 2021)*

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 12\,500$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} = 0{,}94u_n + 300$$

Le but de l'exercice est de démontrer que $(u_n)$ admet une limite, puis de déterminer celle-ci.

/1 1. Calculer $u_1$ et vérifier que $u_2 = 11\,627$.

/3 2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ : $u_n > 5000$.

/1 (b) Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)$ ?

/3 3. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} < u_n$.

/1 (b) Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)$ ?

/2 4. Justifier que la suite $(u_n)$ converge.

/2 5. Notons $l$ la limite de la suite $(u_n)$. Déterminer $l$.

/1 6. En 2020, une espèce animale comptait 12 500 individus.
L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 6% chaque début d'année. Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 300 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021. Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».
Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

1. $u_1 = 0{,}94 \times u_0 + 300 = 0{,}94 \times 12500 + 300 = 12050$.
   $u_2 = 0{,}94 \times u_1 + 300 = 0{,}94 \times 12050 + 300 = 11627$.
2. (a) Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $u_n > 5000$ ».
   - <u>Initialisation</u> : $u_0 = 12500 > 5000$.
     Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - <u>Hérédité</u> : Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0{,}94u_n + 300 \\ &> 0{,}94 \times 5000 + 300 \quad \text{(hyp. de récurrence)} \\ &= 5000 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\mathcal{P}_0$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 0.
  Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

(b) On en déduit que $(u_n)$ est minorée.

3. (a) Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $u_{n+1} < u_n$ ».

- Initialisation : $u_1 = 12050 < 12500 = u_0$.
  Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Hérédité : Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 0{,}94u_{n+1} + 300 \\ &< 0{,}94u_n + 300 \quad \text{(hyp. de récurrence)} \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\mathcal{P}_0$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 0.
  Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

(b) On en déduit que $(u_n)$ est décroissante.

(c) D'après ce qui précède, $(u_n)$ est décroissante et minorée. Donc d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)$ converge.

(d) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.
$l$ vérifie ainsi l'équation $l = 0{,}94l + 300$.

$$\begin{aligned} l = 0{,}94l + 300 &\Leftrightarrow 0{,}06l = 300 \\ &\Leftrightarrow l = \boxed{5000} \end{aligned}$$

(e) D'éprès l'énoncé, on pourrait modéliser la population de cette espèce par la suite $(u_n)$.
Nous avons vu que $(u_n)$ converge vers un réel $l > 2$, donc l'espèce ne s'éteindra à priori pas suivant ce modèle.
De plus, $\frac{u_0}{2} = 6250$ et $l = 5000$.
Donc $l < \frac{u_0}{2}$.
Donc la dernière affirmation est vraie.

**Exercice 2** ........................................................................................ 6 pts

Soit $(t_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_0 = \frac{11}{2}$ et $t_n = \frac{20n+11}{4n+2}$.

1. Dans un tableur, on obtient les termes suivants :

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $n$ | $t_n$ |
| 2 | 0 | 5,5 |
| 3 | 1 | 5,1667 |
| 4 | 2 | 5,1 |
| 5 | 3 | 5,0714 |
| 6 | 4 | 5,0556 |
| 7 | 5 | 5,0455 |

/1 (a) Quelle formule faut-il saisir en B3 pour obtenir les valeurs des termes de la suite en l'étirant vers le bas ?

/1 (b) Conjecturer la limite de la suite $(t_n)$, éventuellement à l'aide de la calculatrice.

/2 2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 5 + \frac{1}{4n+2}$.

/2 (b) Démontrer la conjecture précédemment émise.

1. (a) « =(20*A3+ 11)/(4*A3+2) ».

   (b) La suite $(t_n)$ semble converger vers 5.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} 5 + \frac{1}{4n+2} &= \frac{5(4n+2)}{4n+2} + \frac{1}{4n+2} \\ &= \frac{20n+10+1}{4n+2} \\ &= \frac{20n+11}{4n+2} \\ &= t_n \end{aligned}$$

   (b) Soit $\varepsilon > 0$ un réel.

$$\begin{aligned} 5-\varepsilon < t_n < 5+\varepsilon &\Leftrightarrow 5-\varepsilon < 5 + \frac{1}{4n+2} < 5+\varepsilon \\ &\Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{4n+2} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{1}{4n+2}\right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4n+2} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 1 < \varepsilon(4n+2) \\ &\Leftrightarrow 1 < 4\varepsilon n + 2\varepsilon \\ &\Leftrightarrow -4\varepsilon n < 2\varepsilon - 1 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{2\varepsilon - 1}{-4\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} \end{aligned}$$

   Soit $n_0$ le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$.
   Pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in ]5-\varepsilon ; 5+\varepsilon[$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Terminale

# DS de Mathématiques (Sujet B)

***Le sujet est à rendre avec la copie.***
*Les exercices sont* ***indépendants****. L'usage de la calculatrice est* ***autorisé****.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la* ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

| Exercice | 1 | 2 | Total |
|---|---|---|---|
| Points | 14 | 6 | 20 |
| Score | | | |

## Exercice 1 ........ 14 pts

*(Inspiré du sujet 2 Baccalauréat Polynésie 2 juin 2021)*

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 9\,000$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} = 0{,}96u_n + 160$$

Le but de l'exercice est de démontrer que $(u_n)$ admet une limite, puis de déterminer celle-ci.

/1 1. Calculer $u_1$ et vérifier que $u_2 = 8\,608$.

/3 2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ : $u_n > 4000$.

/1 (b) Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)$ ?

/3 3. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} < u_n$.

/1 (b) Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)$ ?

/2 4. Justifier que la suite $(u_n)$ converge.

/2 5. Notons $l$ la limite de la suite $(u_n)$. Déterminer $l$.

/1 6. En 2020, une espèce animale comptait 9 000 individus.
L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 4% chaque début d'année. Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 160 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021. Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».
Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

1. $u_1 = 0{,}96 \times u_0 + 160 = 0{,}96 \times 9000 + 160 = 8800$.
   $u_2 = 0{,}96 \times u_1 + 160 = 0{,}96 \times 8800 + 160 = 8608$.
2. (a) Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $u_n > 4000$ ».
   - Initialisation : $u_0 = 9000 > 4000$.
     Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0{,}96u_n + 160 \\ &> 0{,}96 \times 4000 + 160 \quad \text{(hyp. de récurrence)} \\ &= 4000 \end{aligned}$$

     Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\mathcal{P}_0$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 0.
  Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

(b) On en déduit que $(u_n)$ est minorée.

3. (a) Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $u_{n+1} < u_n$ ».

- Initialisation : $u_1 = 8800 < 9000 = u_0$.
  Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Hérédité : Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 0{,}96u_{n+1} + 160 \\ &< 0{,}96u_n + 160 \quad \text{(hyp. de récurrence)} \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\mathcal{P}_0$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 0.
  Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

(b) On en déduit que $(u_n)$ est décroissante.

(c) D'après ce qui précède, $(u_n)$ est décroissante et minorée. Donc d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)$ converge.

(d) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.
$l$ vérifie ainsi l'équation $l = 0{,}96l + 160$.

$$\begin{aligned} l = 0{,}96l + 160 &\Leftrightarrow 0{,}04l = 160 \\ &\Leftrightarrow l = \boxed{4000} \end{aligned}$$

(e) D'éprès l'énoncé, on pourrait modéliser la population de cette espèce par la suite $(u_n)$.
Nous avons vu que $(u_n)$ converge vers un réel $l > 2$, donc l'espèce ne s'éteindra à priori pas suivant ce modèle.
De plus, $\frac{u_0}{2} = 4500$ et $l = 4000$.
Donc $l < \frac{u_0}{2}$.
Donc la dernière affirmation est vraie.

**Exercice 2** ........................................................................ 6 pts

Soit $(t_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_0 = \frac{9}{4}$ et $t_n = \frac{4n+9}{2n+4}$.

1. Dans un tableur, on obtient les termes suivants :

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $n$ | $t_n$ |
| 2 | 0 | 2,25 |
| 3 | 1 | 2,1667 |
| 4 | 2 | 2,125 |
| 5 | 3 | 2,1 |
| 6 | 4 | 2,0833 |
| 7 | 5 | 2,0714 |

/1 (a) Quelle formule faut-il saisir en B3 pour obtenir les valeurs des termes de la suite en l'étirant vers le bas ?

/1 (b) Conjecturer la limite de la suite $(t_n)$, éventuellement à l'aide de la calculatrice.

/2 2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 2 + \frac{1}{2n+4}$.

/2 (b) Démontrer la conjecture précédemment émise.

1. (a) « =(4*A3+ 9)/(2*A3+4) ».

   (b) La suite $(t_n)$ semble converger vers 2.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{2n+4} &= \frac{2(2n+4)}{2n+4} + \frac{1}{2n+4} \\ &= \frac{4n+8+1}{2n+4} \\ &= \frac{4n+9}{2n+4} \\ &= t_n \end{aligned}$$

   (b) Soit $\varepsilon > 0$ un réel.

$$\begin{aligned} 2-\varepsilon < t_n < 2+\varepsilon &\Leftrightarrow 2-\varepsilon < 2 + \frac{1}{2n+4} < 2+\varepsilon \\ &\Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{2n+4} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2n+4}\right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2n+4} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 1 < \varepsilon(2n+4) \\ &\Leftrightarrow 1 < 2\varepsilon n + 4\varepsilon \\ &\Leftrightarrow -2\varepsilon n < 4\varepsilon - 1 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{4\varepsilon - 1}{-2\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1-4\varepsilon}{2\varepsilon} \end{aligned}$$

   Soit $n_0$ le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{1-4\varepsilon}{2\varepsilon}$.
   Pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in ]2-\varepsilon ; 2+\varepsilon[$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.