1 Fonctions polynômiales de degré 2

I Définition

Définition 1.1

Une fonction polynôme du second degré est une fonction de la forme $f : x \mapsto$ $ax^2 + bx + c$, avec a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
Sa courbe représentative est une **parabole**.

Remarque 1.1. $c = f(0)$. On peut donc déterminer la valeur de c graphiquement en regardant l'ordonnée à l'origine.

Remarque 1.2. Nous avons déjà étudié auparavant une fonction polynôme du second degré particulière : la fonction carré ($a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$).

Exemple 1.1. Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions polynômes du second degré ? Préciser les coefficients a, b et c associés.

1. $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$
   Oui : $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$
2. $f : x \mapsto x^2$
   Oui : $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$
3. $f : x \mapsto -x^2 + \sqrt{x}$
   Non
4. $f : x \mapsto -4x + 3$
   Non, f est une fonction affine.
5. $f : x \mapsto (-x - 2)(x + 3)$
   $(-x - 2)(x + 3) = -x^2 - 3x - 2x - 6 = -x^2 - 5x - 6$.
   Donc oui f est une fonction polynôme du second degré et : $a = -1$; $b = -5$; $c = -6$

II Extremum et sens de variation

Propriété 1.1

Toute fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous forme **canonique** :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a} = f(\alpha)$

Démonstration

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a(x - \alpha)^2 + \beta \end{aligned}$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$.
$f(\alpha) = a(\alpha - \alpha)^2 + \beta = \beta$. □

Propriété 1.2

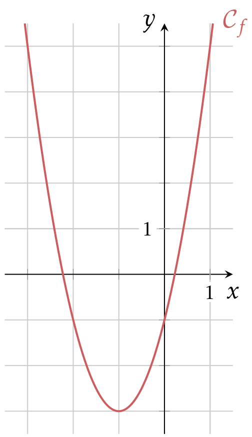
Soit f une fonction polynômiale de degré 2.
Le point $S(\alpha\ ;\ \beta)$ est le sommet de $\mathscr{C}_f$.
β est appelé **extremum** de f (atteint en α).

Exemple 1.2. Soit f une fonction polynômiale de degré 2 dont la courbe représentative est tracée ci-contre.

1. Déterminer graphiquement α et β.
   $\alpha = -1$ et $\beta = -3$.
2. En déduire la forme canonique de $f(x)$.
   $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = a(x+1)^2 - 3$.
   On lit graphiquement $f(0) = -1$.

$$\begin{aligned} f(0) = -1 &\Leftrightarrow a(0+1)^2 - 3 = -1 \\ &\Leftrightarrow a = 2 \end{aligned}$$

   Donc $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$.
3. En déduire la forme développée de $f(x)$.
   En développant $f(x)$, on trouve $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$.

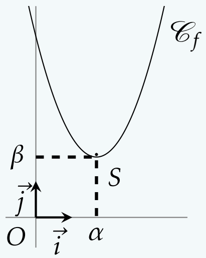


Propriété 1.3

Soit f une fonction polynômiale de degré 2.

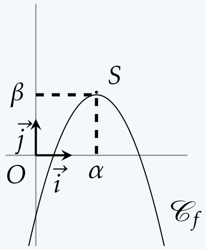
- Si $a > 0$, alors β est un **minimum**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗



- Si $a < 0$, alors β est un **maximum** :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘



Démonstration

- Cas 1 : $a > 0$.
  Pour tout x de $\mathbb{R}$: $(x-\alpha)^2 \geq 0$.
  Or $a > 0$, donc : $\forall x \in R, a(x-\alpha)^2 \geq 0$
  Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, a(x-\alpha)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a(x-\alpha)^2 + \beta \geq \beta \Leftrightarrow f(x) \geq \beta$. (On dit alors que β est un *minorant* de f)
  De plus : $f(\alpha) = a(\alpha-\alpha)^2 + \beta = a \cdot 0 + \beta = \beta$.
  Donc β est le *minimum* de f et il est atteint en $x = \alpha$.
- Cas 2 : $a < 0$.
  Pour tout x de $\mathbb{R}$: $(x-\alpha)^2 \geq 0$.
  Or $a < 0$, donc : $\forall x \in R, a(x-\alpha)^2 \leq 0$
  Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, a(x-\alpha)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a(x-\alpha)^2 + \beta \leq \beta \Leftrightarrow f(x) \leq \beta$. (On dit alors que β est un *majorant* de f)
  De plus : $f(\alpha) = a(\alpha-\alpha)^2 + \beta = a \cdot 0 + \beta = \beta$.
  Donc β est le *maximum* de f et il est atteint en $x = \alpha$.

□

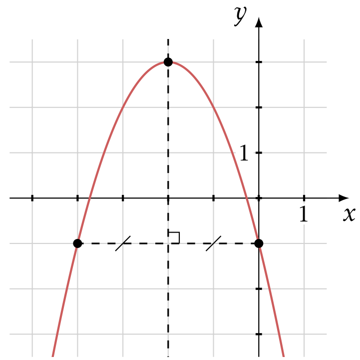
Remarque 1.3. La parabole est tournée vers le haut lorsque $a > 0$ (penser au cas de la fonction carré), et vers le bas lorsque $a < 0$.

Remarque 1.4. Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Exemple 1.3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto -x^2 - 4x - 1$, puis tracer une allure de sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot(-1)} = -2$.
$\beta = f(-2) = -1\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2) - 1 = 3$.
$a < 0$, donc β est un maximum.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↗	3	↘



Le sommet de $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnées $(-2\ ;\ 3)$.
Ordonnée à l'origine : $c = -1$.
On utilise la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = -2$ pour compléter le tracé.

III Zéros et signe

III.1 Zéros

Rappel 1.1. $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant**.

Propriété 1.4

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, f n'a pas de zéro.
- Si $\Delta = 0$, f a un unique zéro : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
  $f(x)$ peut alors s'écrire sous la forme $a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, f a deux zéros :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  $f(x)$ peut alors s'écrire sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.

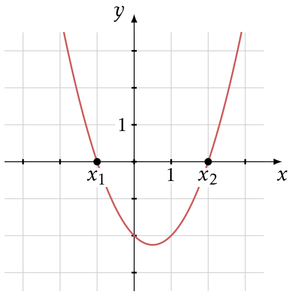
Les formes précédentes sont appelées **forme factorisée** du polynôme ax^2+bx+c.

Remarque 1.5. Si on connaît la forme factorisée d'une fonction polynôme du second degré, on connaît ses zéros. Réciproquement, connaître les zéros d'une fonction polynôme du second degré permet de l'écrire sous forme factorisée (il ne reste qu'à déterminer le paramètre a).

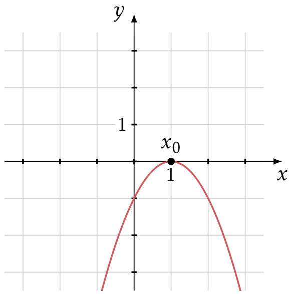
Rappel 1.2. Les zéros de la fonction sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

Illustration

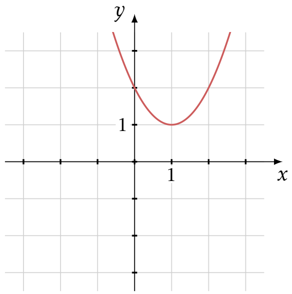
•$\Delta > 0$: deux zéros.



•$\Delta = 0$: un seul zéro.



•$\Delta < 0$: pas de zéro.



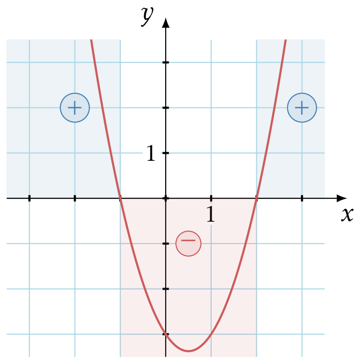
III.2 Signe

Propriété 1.5

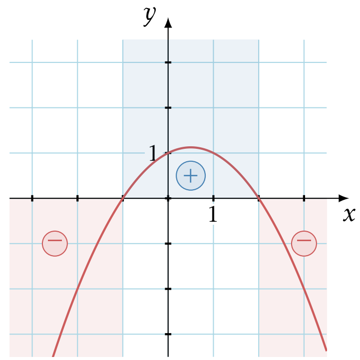
$ax^2 + bx + c$ est du **signe de a sauf entre les racines**, si elles existent.

Illustration

•$f(x) = \frac{3}{2}(x+1)(x-2)$:



•$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$:



Exemple 1.4. Dresser le tableau de signes de la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 3x - 60$.

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a = 3$, $x_1 = -5$ et $x_2 = 4$.
$a > 0$, d'où :

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	