Prénom : ...
Nom : ...
Classe : M1

DS de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice **est autorisé** .*
*Il est rappelé que la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	Total
Points	11	11
Note		

Exercice 1 .... 11 pts

Soient $A(2;-3)$, $B(6;-1)$ et $C(1;4)$ dans un repère orthonormé.

/1 1. Dessiner le repère et y représenter les points A, B et C.

/2 2. Donner une mesure de $\widehat{ABC}$ à 10^{-2} près.

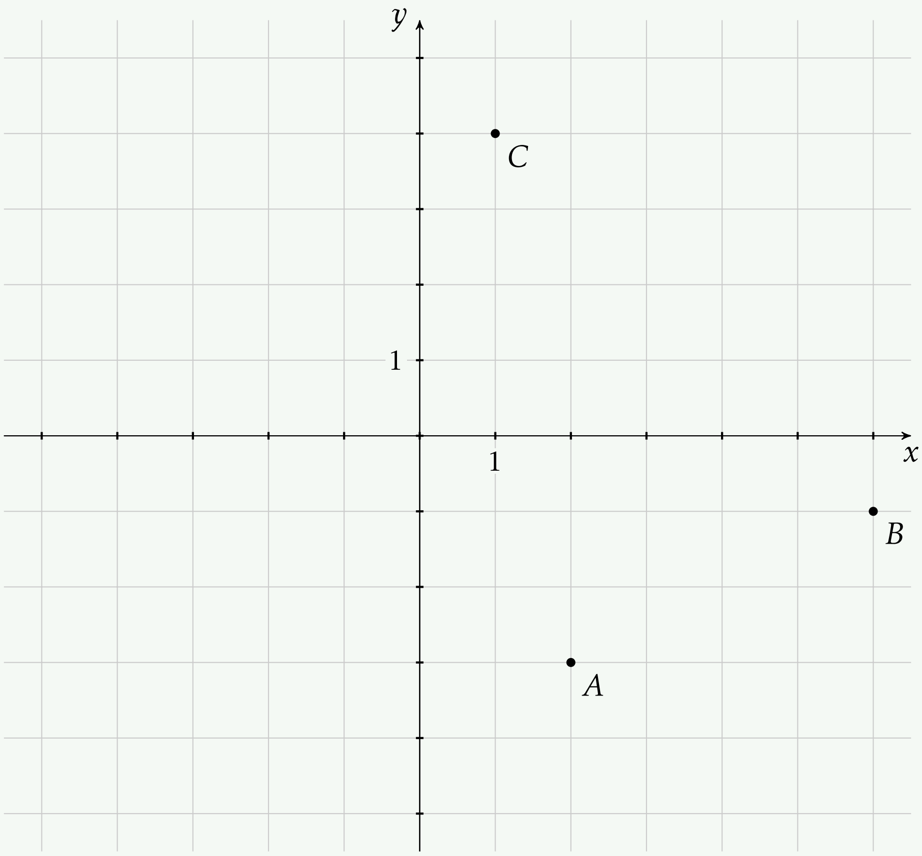
/3 3. Déterminer la nature du triangle ABC.

/2 4. À l'aide d'un déterminant, calculer l'aire de ABC.

/2 5. (a) Démontrer que le pied de la hauteur issue de A a pour coordonnées $H(5;0)$.

/1 (b) Retrouver l'aire du triangle ABC calculée dans la question précédente, sans déterminant.

1.



2. $\widehat{ABC}$ est formé par $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ -3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 4-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 \times (-5) + (-2) \times 5 = 10$.
$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$.
$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} &= \arccos\left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{10}{5\sqrt{2} \times 2\sqrt{5}}\right) \\ &\approx 71{,}57^\circ \end{aligned}$$

3. $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 4-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.
   Donc : $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$.
   Donc ABC est isocèle en C..
   Le plus grand côté est $[AC]$.
   On regarde si l'angle opposé est droit pour savoir si le triangle est rectangle.
   $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} \neq 0$, donc l'angle opposé n'est pas droit.

4. $\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = 4 \times 7 - (-1) \times 2 = 30$.
   Notons $\mathcal{A}_{ABC}$ l'aire de ABC.
   $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)\right|}{2} = 15$.
5. (a) $\overrightarrow{BH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{BA}$ sur $\overrightarrow{BC}$.
   $\overrightarrow{BH} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2} \times \overrightarrow{BC} = \frac{10}{\left(5\sqrt{2}\right)^2} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_H - x_B = -1 \\ y_H - y_B = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 5 \\ y_H = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   (b) En considérant BC comme base, la hauteur associée est AH.
   $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 0-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   On en déduit $AH = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{BC \times AH}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : M1

DS de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice* ***est autorisé*** *.*
Il est rappelé que la qualité de la ***rédaction****, la* ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

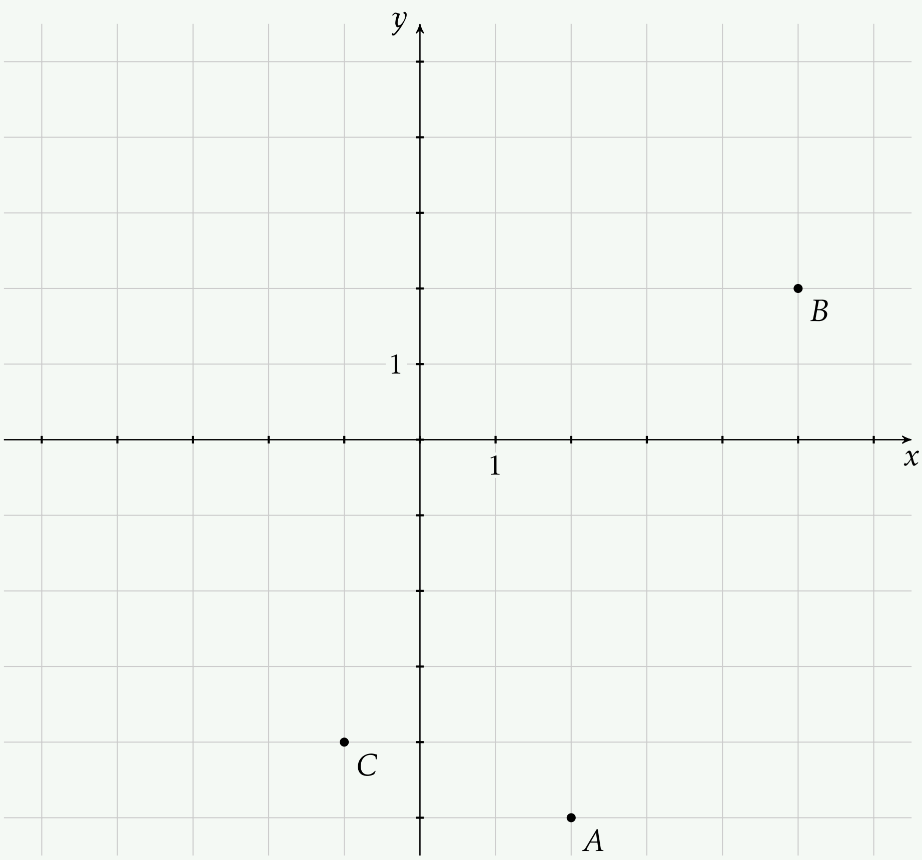
Exercice	1	Total
Points	11	11
Note		

Exercice 1 .... 11 pts

Soient $A(2;-5)$, $B(5;2)$ et $C(-1;-4)$ dans un repère orthonormé.

/1 1. Dessiner le repère et y représenter les points A, B et C.
/2 2. Donner une mesure de $\widehat{ABC}$ à 10^{-2} près.
/3 3. Déterminer la nature du triangle ABC.
/2 4. À l'aide d'un déterminant, calculer l'aire de ABC.
/2 5. (a) Démontrer que le pied de la hauteur issue de A a pour coordonnées $H(0;-3)$.
/1 (b) Retrouver l'aire du triangle ABC calculée dans la question précédente, sans déterminant.

1.



2. $\widehat{ABC}$ est formé par $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ -5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1-5 \\ -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -3 \times (-6) + (-7) \times (-6) = 60$.

$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}$.

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} &= \arccos\left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{60}{6\sqrt{2} \times \sqrt{58}}\right) \\ &\approx 21{,}8^\circ \end{aligned}$$

3. $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ -4-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Donc : $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

   Donc ABC n'est pas isocèle.

   Le plus grand côté est $[BC]$.

   On regarde si l'angle opposé est droit pour savoir si le triangle est rectangle.

   $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \neq 0$, donc l'angle opposé n'est pas droit.

   On en déduit que ABC est quelconque.

4. $\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = 3 \times 1 - (-3) \times 7 = 24$.

   Notons $\mathcal{A}_{ABC}$ l'aire de ABC.

   $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)\right|}{2} = 12$.

5. (a) $\overrightarrow{BH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{BA}$ sur $\overrightarrow{BC}$.

   $\overrightarrow{BH} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2} \times \overrightarrow{BC} = \frac{60}{\left(6\sqrt{2}\right)^2} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_H - x_B = -5 \\ y_H - y_B = -5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

   (b) En considérant BC comme base, la hauteur associée est AH.

   $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ -3-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   On en déduit $AH = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

   Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{BC \times AH}{2} \\ &= \frac{6\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} \\ &= 12 \end{aligned}$$