

Prénom : ...

Nom : ...

Classe : M1

— DS de Mathématiques (Sujet A) —



Le sujet est à rendre avec la copie.

Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice **est autorisé**.

Il est rappelé que la **qualité de la rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice	1	2	3	Total
Points	9	5	5	19
Note				

Exercice 1 9 pts

Pour chacune des expressions suivantes, déterminer l'ensemble de définition et simplifier.

/3 1. $\frac{x^2-5x}{x^2-4} \times \frac{2x+4}{x}$.

/3 2. $\frac{x^2+6x+8}{x+1} \div \frac{x+4}{3x+3}$.

/3 3. $\frac{(x+1)^2}{x^2+3x-18} + \frac{x}{x+6}$.

1. $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

$E_D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$.

Pour tout $x \in E_D$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-5x}{x^2-4} \times \frac{2x+4}{x} &= \frac{x(x-5)}{(x-2)(x+2)} \times \frac{2(x+2)}{x} \\ &= \frac{2(x-5)}{x-2} \end{aligned}$$

2. $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

$3x+3 = 0 \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1$.

$x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

$E_D = \mathbb{R} \setminus \{-4; -1\}$.

Pour tout $x \in E_D$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+6x+8}{x+1} \div \frac{x+4}{3x+3} &= \frac{(x+4)(x+2)}{x+1} \times \frac{3(x+1)}{x+4} \\ &= 3(x+2) \end{aligned}$$

3. $x^2 + 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x+6)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -6$ ou $x = 3$.

$x+6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$.

$E_D = \mathbb{R} \setminus \{-6; 3\}$.

Pour tout $x \in E_D$:

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)^2}{x^2+3x-18} + \frac{x}{x+6} &= \frac{(x+1)^2}{(x+6)(x-3)} + \frac{x(x-3)}{(x+6)(x-3)} \\ &= \frac{(x+1)^2 + x(x-3)}{(x+6)(x-3)} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 3x}{(x+6)(x-3)} \\ &= \frac{2x^2 - x + 1}{(x+6)(x-3)} \end{aligned}$$

Exercice 2 5 pts

Résoudre l'équation ci-dessous :

$$-\frac{x-2}{5x+3} = \frac{2}{x+1}$$

$$5x+3=0 \Leftrightarrow 5x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}.$$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

$$E_D = \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{3}{5}\right\}.$$

Pour tout $x \in E_D$:

$$\begin{aligned} -\frac{x-2}{5x+3} = \frac{2}{x+1} &\Leftrightarrow -\frac{x-2}{5x+3} - \frac{2}{x+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-(x-2)(x+1) - 2(5x+3)}{(5x+3)(x+1)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-(x^2-x-2) - 10x-6}{(5x+3)(x+1)} = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2 - 9x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 9x + 4 = 0 \end{aligned}$$

$$x^2 + 9x + 4 = ax^2 + bx + c \text{ avec } a = 1, b = 9 \text{ et } c = 4.$$

$$\Delta = 81 - 16 = 65.$$

$\Delta > 0$ donc $x^2 + 9x + 4$ a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{65}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-9 + \sqrt{65}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-9 - \sqrt{65}}{2}; \frac{-9 + \sqrt{65}}{2} \right\}$$

Exercice 3 5 pts

Résoudre l'inéquation ci-dessous :

$$\frac{2}{x-3} \leq \frac{x}{x+5}$$

$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3.$$

$$x+5=0 \Leftrightarrow x=-5.$$

$$E_D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 3\}.$$

Pour tout $x \in E_D$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-3} \leq \frac{x}{x+5} &\Leftrightarrow \frac{2}{x-3} - \frac{x}{x+5} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(x+5) - x(x-3)}{(x-3)(x+5)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 5x + 10}{(x-3)(x+5)} \leq 0 \end{aligned}$$

- $-x^2 + 5x + 10 = ax^2 + bx + c$ avec $a = -1, b = 5$ et $c = 10$.

$$\Delta = 25 + 40 = 65.$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{65}}{-2} = \frac{5 + \sqrt{65}}{2}.$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{65}}{-2} = \frac{5 - \sqrt{65}}{2}.$$

$-x^2 + 5x + 10$ est du signe de a ($a = -1 < 0$) sauf entre ses racines.

- $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.
- $x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$.

On en déduit :

x	$-\infty$	-5	$\frac{5-\sqrt{65}}{2}$	3	$\frac{5+\sqrt{65}}{2}$	$+\infty$		
$-x^2 + 5x + 10$		-	-	0	+	+	0	-
$x - 3$		-	-	-	0	+	+	+
$x + 5$		-	0	+	+	+	+	+
$\frac{-x^2+5x+10}{(x-3)(x+5)}$		-	+	0	-	+	0	-

On en déduit :

$$S =]-\infty; -5[\cup \left[\frac{5 - \sqrt{65}}{2}; 3 \right[\cup \left[\frac{5 + \sqrt{65}}{2}; +\infty \right[$$

Prénom : ...

Nom : ...

Classe : M1

DS de Mathématiques (Sujet B)



Le sujet est à rendre avec la copie.

Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice **est autorisé**.

Il est rappelé que la **qualité de la rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice	1	2	3	Total
Points	9	5	5	19
Note				

Exercice 1 9 pts

Pour chacune des expressions suivantes, déterminer l'ensemble de définition et simplifier.

/3 1. $\frac{x^2-5x}{x^2-4} \times \frac{2x+4}{x}$.

/3 2. $\frac{x^2+6x+8}{x+1} \div \frac{x+4}{3x+3}$.

/3 3. $\frac{(x+1)^2}{x^2+3x-18} + \frac{x}{x+6}$.

1. $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

$E_D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$.

Pour tout $x \in E_D$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-5x}{x^2-4} \times \frac{2x+4}{x} &= \frac{x(x-5)}{(x-2)(x+2)} \times \frac{2(x+2)}{x} \\ &= \frac{2(x-5)}{x-2} \end{aligned}$$

2. $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

$3x+3 = 0 \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1$.

$x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

$E_D = \mathbb{R} \setminus \{-4; -1\}$.

Pour tout $x \in E_D$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+6x+8}{x+1} \div \frac{x+4}{3x+3} &= \frac{(x+4)(x+2)}{x+1} \times \frac{3(x+1)}{x+4} \\ &= 3(x+2) \end{aligned}$$

3. $x^2 + 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x+6)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -6$ ou $x = 3$.

$x+6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$.

$E_D = \mathbb{R} \setminus \{-6; 3\}$.

Pour tout $x \in E_D$:

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)^2}{x^2+3x-18} + \frac{x}{x+6} &= \frac{(x+1)^2}{(x+6)(x-3)} + \frac{x(x-3)}{(x+6)(x-3)} \\ &= \frac{(x+1)^2 + x(x-3)}{(x+6)(x-3)} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 3x}{(x+6)(x-3)} \\ &= \frac{2x^2 - x + 1}{(x+6)(x-3)} \end{aligned}$$

Exercice 2 5 pts

Résoudre l'équation ci-dessous :

$$-\frac{x-2}{5x+3} = \frac{2}{x+1}$$

$$5x+3=0 \Leftrightarrow 5x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}.$$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

$$E_D = \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{3}{5}\right\}.$$

Pour tout $x \in E_D$:

$$\begin{aligned} -\frac{x-2}{5x+3} = \frac{2}{x+1} &\Leftrightarrow -\frac{x-2}{5x+3} - \frac{2}{x+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-(x-2)(x+1) - 2(5x+3)}{(5x+3)(x+1)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-(x^2-x-2) - 10x-6}{(5x+3)(x+1)} = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2 - 9x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 9x + 4 = 0 \end{aligned}$$

$$x^2 + 9x + 4 = ax^2 + bx + c \text{ avec } a = 1, b = 9 \text{ et } c = 4.$$

$$\Delta = 81 - 16 = 65.$$

$\Delta > 0$ donc $x^2 + 9x + 4$ a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{65}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-9 + \sqrt{65}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-9 - \sqrt{65}}{2}; \frac{-9 + \sqrt{65}}{2} \right\}$$

Exercice 3 5 pts

Résoudre l'inéquation ci-dessous :

$$\frac{2}{x-3} \leq \frac{x}{x+5}$$

$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3.$$

$$x+5=0 \Leftrightarrow x=-5.$$

$$E_D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 3\}.$$

Pour tout $x \in E_D$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-3} \leq \frac{x}{x+5} &\Leftrightarrow \frac{2}{x-3} - \frac{x}{x+5} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(x+5) - x(x-3)}{(x-3)(x+5)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 5x + 10}{(x-3)(x+5)} \leq 0 \end{aligned}$$

- $-x^2 + 5x + 10 = ax^2 + bx + c$ avec $a = -1, b = 5$ et $c = 10$.

$$\Delta = 25 + 40 = 65.$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{65}}{-2} = \frac{5 + \sqrt{65}}{2}.$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{65}}{-2} = \frac{5 - \sqrt{65}}{2}.$$

$-x^2 + 5x + 10$ est du signe de a ($a = -1 < 0$) sauf entre ses racines.

- $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.
- $x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$.

On en déduit :

x	$-\infty$	-5	$\frac{5-\sqrt{65}}{2}$	3	$\frac{5+\sqrt{65}}{2}$	$+\infty$		
$-x^2 + 5x + 10$		-	-	0	+	+	0	-
$x - 3$		-	-	-	0	+	+	+
$x + 5$		-	0	+	+	+	+	+
$\frac{-x^2+5x+10}{(x-3)(x+5)}$		-	+	0	-	+	0	-

On en déduit :

$$S =]-\infty; -5[\cup \left[\frac{5-\sqrt{65}}{2}; 3 \right[\cup \left[\frac{5+\sqrt{65}}{2}; +\infty \right[$$