Prénom : ...
Nom : ...
Classe : M1

DS de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice **est autorisé** .*
*Il est rappelé que la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	Total
Points	4	4	4	12
Note				

Exercice 1 .... 4 pts

Factoriser le plus possible les polynômes suivantes :

/2 1. $P_1(x) = x^3 - x^2 - 6x$

/2 2. $P_2(x) = -4x^2 + 36$

1.

$$\begin{aligned}P_1(x) &= x^3 - x^2 - 6x\\ &= x\left(x^2 - x - 6\right)\\ &= x\left(x^2 + (-3+2)x + (-3)\times 2\right)\\ &= \boxed{x(x-3)(x+2)}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}P_2(x) &= -4x^2 + 36\\ &= -4\left(x^2 - 9\right)\\ &= \boxed{-4(x+3)(x-3)}\end{aligned}$$

Exercice 2 .... 4 pts

Résoudre l'équation $2x^3 - 4x^2 - 22x + 24 = 0$

$$\begin{aligned}2x^3 - 4x^2 - 22x + 24 = 0 &\Leftrightarrow 2\left(x^3 - 2x^2 - 11x + 12\right) = 0\\ &\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0\end{aligned}$$

On remarque que 1 est une racine de $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$, donc on peut factoriser ce dernier par $x - 1$.

Avec le schéma de Hörner :

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -11 & 12\\ 1 & \downarrow & 1 & -1 & -12\\ \hline & 1 & -1 & -12 & \multicolumn{1}{|c}{0}\end{array}$$

Avec la division classique :

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -2x^2 & -11x & +12 & x-1\\ \cline{5-5} -x^3 & +x^2 & & & x^2 - x - 12\\ \cline{1-2} & -x^2 & -11x & & \\ & x^2 & -x & & \\ \cline{2-3} & & -12x & +12 & \\ & & 12x & -12 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

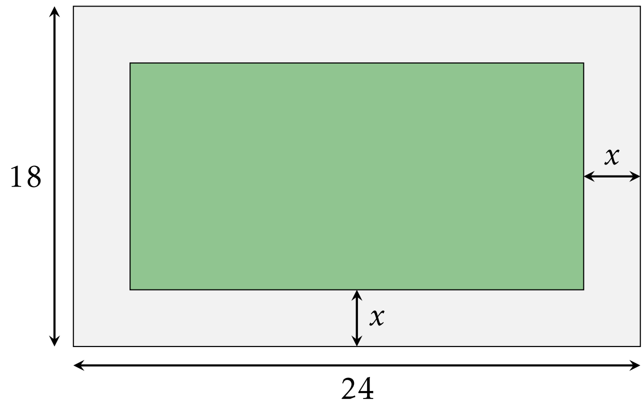
On en déduit :

$$\begin{aligned} x^3-2x^2-11x+12=0 &\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-x-12\right)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+(3-4)x+3\times(-4)\right)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x-4)=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-3 \text{ ou } x=4 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S=\{-3\ ;\ 1\ ;\ 4\}}$

Exercice 3 . . . . **4 pts**

On considère une parcelle rectangulaire mesurant 24 m de longueur et 18 m de largeur.
Sur cette parcelle, on souhaite construire un parc entouré d'une allée.
On voudrait qu'après construction, l'aire de l'allée soit égale à l'aire du parc.
La situation est représentée ci-dessous.
On note x la largeur de l'allée.
Déterminer la valeur de x.



Soit $\mathcal{A}_p$ l'aire de l'intérieur du parc et soit $\mathcal{A}_a$ l'aire de l'allée.

- $\mathcal{A}_p=(24-2x)(18-2x)=4x^2-84x+432$.

- La bande latérale en longueur a pour aire $24\times x$ et il y en a deux.
  De même, la bande latérale en largeur a pour aire $18\times x$.
  En sommant ces 4 bandes, on compte en double chacun des coins.
  Chaque coin ayant pour aire x^2, on doit soustraire $4x^2$.
  Ainsi :
  $\mathcal{A}_a=2\times24\times x+2\times18\times x-4x^2=-4x^2+84x$.

On souhaite que les deux aires soient égales :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p=\mathcal{A}_a &\Leftrightarrow 4x^2-84x+432=-4x^2+84x \\ &\Leftrightarrow 8x^2-168x+432=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-21x+54=0 \end{aligned}$$

$\Delta=(-21)^2-4\times1\times54=225$.
$\Delta>0$, donc l'équation $x^2-21x+54=0$ a deux solutions réelles. $\sqrt{\Delta}=15=15$.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-21)-15}{2\times1} \\ &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-21)+15}{2\times1} \\ &= 18 \end{aligned}$$

La seule solution intéressante dans le contexte donné est 3.
On doit donc avoir $\boxed{x = 3}$ pour que l'allée et le parc aient la même aire.

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : M1

DS de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice* ***est autorisé*** .
Il est rappelé que la qualité de la ***rédaction****, la* ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	Total
Points	4	4	4	12
Note				

Exercice 1 .... 4 pts

Factoriser le plus possible les polynômes suivantes :

/2 1. $P_1(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$
/2 2. $P_2(x) = -2x^2 + 50$

1.

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^3 + 3x^2 - 4x \\ &= x\left(x^2 + 3x - 4\right) \\ &= x\left(x^2 + (4-1)x + 4 \times (-1)\right) \\ &= \boxed{x(x+4)(x-1)} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P_2(x) &= -2x^2 + 50 \\ &= -2\left(x^2 - 25\right) \\ &= \boxed{-2(x+5)(x-5)} \end{aligned}$$

Exercice 2 .... 4 pts

Résoudre l'équation $2x^3 - 8x^2 - 14x + 20 = 0$

$$\begin{aligned} 2x^3 - 8x^2 - 14x + 20 = 0 &\Leftrightarrow 2\left(x^3 - 4x^2 - 7x + 10\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0 \end{aligned}$$

On remarque que 1 est une racine de $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$, donc on peut factoriser ce dernier par $x - 1$.

Avec le schéma de Hörner :

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & -7 & 10 \\ 1 & \downarrow & 1 & -3 & -10 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array}$$

Avec la division classique :

$$\begin{array}{rr|l} x^3 - 4x^2 & -7x + 10 & x - 1 \\ \cline{3-3} -x^3 + x^2 & & x^2 - 3x - 10 \\ \cline{1-1} -3x^2 & -7x & \\ 3x^2 & -3x & \\ \hline & -10x + 10 & \\ & 10x - 10 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

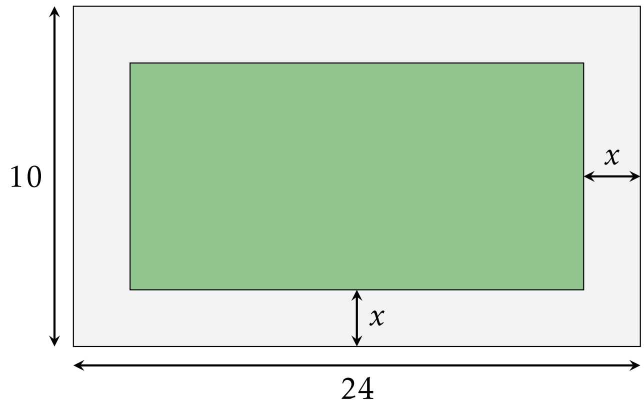
On en déduit :

$$\begin{aligned} x^3-4x^2-7x+10=0 &\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-3x-10\right)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+(2-5)x+2\times(-5)\right)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-5)=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-2 \text{ ou } x=5 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S=\{-2\,;\,1\,;\,5\}}$

Exercice 3 .... 4 pts

On considère une parcelle rectangulaire mesurant 24 m de longueur et 10 m de largeur.
Sur cette parcelle, on souhaite construire un parc entouré d'une allée.
On voudrait qu'après construction, l'aire de l'allée soit égale à l'aire du parc.
La situation est représentée ci-dessous.
On note x la largeur de l'allée.
Déterminer la valeur de x.



Soit $\mathcal{A}_p$ l'aire de l'intérieur du parc et soit $\mathcal{A}_a$ l'aire de l'allée.

- $\mathcal{A}_p=(24-2x)(10-2x)=4x^2-68x+240$.

- La bande latérale en longueur a pour aire $24\times x$ et il y en a deux.
  De même, la bande latérale en largeur a pour aire $10\times x$.
  En sommant ces 4 bandes, on compte en double chacun des coins.
  Chaque coin ayant pour aire x^2, on doit soustraire $4x^2$.
  Ainsi :
  $\mathcal{A}_a=2\times24\times x+2\times10\times x-4x^2=-4x^2+68x$.

On souhaite que les deux aires soient égales :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p=\mathcal{A}_a &\Leftrightarrow 4x^2-68x+240=-4x^2+68x \\ &\Leftrightarrow 8x^2-136x+240=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-17x+30=0 \end{aligned}$$

$\Delta=(-17)^2-4\times1\times30=169$.
$\Delta>0$, donc l'équation $x^2-17x+30=0$ a deux solutions réelles. $\sqrt{\Delta}=13=13$.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-17)-13}{2\times1} \\ &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-17)+13}{2\times1} \\ &= 15 \end{aligned}$$

La seule solution intéressante dans le contexte donné est 2.
On doit donc avoir $\boxed{x = 2}$ pour que l'allée et le parc aient la même aire.