Prénom : ...
Nom : ...
Classe : M1

Bilan de Mathématiques (Sujet A)

Durée : 2h30

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice **est autorisé** .*
*Il est rappelé que la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	4	Total
Points	12	7	6	5	30
Note					

Exercice 1 Application directes .... 12 pts

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

/4 1. En justifiant, dresser les tableaux de variations et de signes de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 12$$

.

- Tableau de signes :
  $\Delta = 100$.
  On trouve deux racines : 3 et -2.
  $2x^2 - 2x - 12$ est du signe de a (ici $a = 2 > 0$), sauf entre ses racines :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Tableau de variations :
  $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\times 2} = \frac{1}{2}$.
  $\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{25}{2}$.
  $a > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est une parabole tournée vers le haut.
  On en déduit :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{25}{2}$	$\nearrow$	

/2 2. Soient $\vec{a}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ dans un repère quelconque du plan.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par :

$$\vec{u} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 4\vec{a} - 2\vec{b}\\ &= 4\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 4\times(-3)-2\times 4 \\ 4\times 2-2\times 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -20 \\ -4 \end{pmatrix}$$

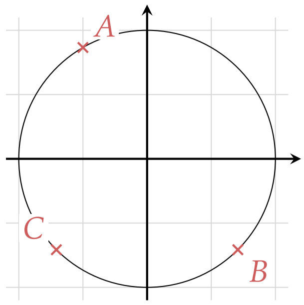
/3 3. Convertir les angles suivants en radians/degrés en indiquant d'abord la valeur exacte, puis en donnant une valeur approchée à 10^{-2} près :

- $55°$
- $\frac{\pi}{18}$ rad
- $35°$

1. $55° = 55\times\frac{\pi}{180}\,\text{rad} = \frac{11\pi}{36}\,\text{rad} \approx 0{,}96\,\text{rad}$
2. $\frac{\pi}{18}\,\text{rad} = \frac{\pi}{18}\times\frac{180°}{\pi} = 10° = 10°.$
3. $35° = 35\times\frac{\pi}{180}\,\text{rad} = \frac{7\pi}{36}\,\text{rad} \approx 0{,}61\,\text{rad}$

/3 4. Placer **précisément** sur le cercle trigonométrique les points images des réels ci-dessous.

- Point A image de $-\frac{4\pi}{3}$.
- Point B image de $\frac{7\pi}{4}$
- Point C image de $-\frac{19\pi}{4}$



Exercice 2 Géométrie .... 7 pts

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J)$.
Soient $A(7;-2)$, $B(4;1)$ et $C(-2;-4)$.

/1 1. Tracer le repère, et y placer les points A, B et C.

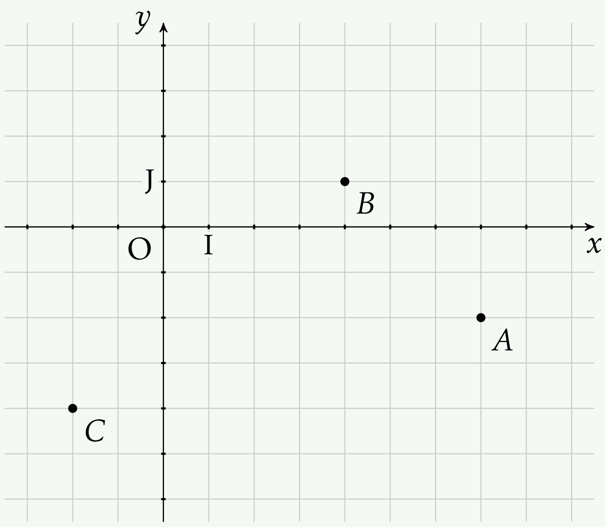
/1,5 2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

/1,5 3. Démontrer que $\|\overrightarrow{AB}\| = 3\sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{61}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{85}$.

/1 4. ABC est-il rectangle ? *Justifier*.

/2 5. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1.



2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4-7 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On montre de même : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   Donc :

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{AB}|| &= \sqrt{(-3)^2 + 3^2} \\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

   On montre les autres égalités de la même manière.

4. Le plus grand côté du triangle est $[AC]$.
   $AC^2 = ||\overrightarrow{AC}||^2 = \sqrt{85}^2 = 85$.
   $AB^2 + BC^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{61}^2 = 18 + 61 = 79$.
   $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$, donc d'après le théorème de Pythagore (sa *contraposée*), ABC n'est pas rectangle.

5. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4-7 = -2 - x_D \\ 1-(-2) = -4 - y_D \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -y_D \\ 7 = -y_D \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = -7 \end{cases}\end{aligned}$$

   Donc $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $D(1;-7)$.

Exercice 3 Algèbre .... 6 pts

Soit $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 42x + 36$.

/1 1. Déterminer une racine évidente de $P(x)$.

/5 2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$

1. $P(1) = 2 \times 1^3 + 4 \times 1^2 - 42 \times 1 + 36 = 0$.
   Donc 1 est une racine de P.
2. On en déduit que $P(x)$ est factorisable par $(x-1)$.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 4 & -42 & 36 \\
1 & \downarrow & 2 & 6 & -36 \\
\hline
 & 2 & 6 & -36 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l}
2x^3 + 4x^2 & - 42x & + 36 & x-1 \\
\cline{4-4}
-2x^3 + 2x^2 & & & 2x^2 + 6x - 36 \\
\cline{1-1}
6x^2 & - 42x & & \\
-6x^2 & + 6x & & \\
\cline{1-2}
 & -36x & + 36 & \\
 & 36x & - 36 & \\
\cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi : $P(x) = (x-1)\left(2x^2+6x-36\right) = 2(x-1)\left(x^2+3x-18\right)$.

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow 2(x-1)\left(x^2+3x-18\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ou } x^2+3x-18=0 \end{aligned}$$

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Il s'agit de la racine que l'on connaissait déjà.
- On résout $x^2+3x-18=0$.
  On calcule Δ. On trouve $\Delta = 81$.
  On en déduit que $x^2+3x-18$ a deux racines réelles.

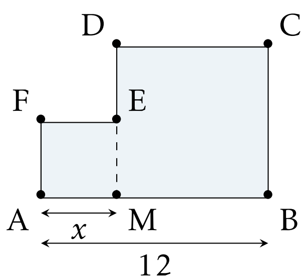
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-3-\sqrt{81}}{2\times 1} \\ &= -6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-3+\sqrt{81}}{2\times 1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Finalement, on a donc :

$$\boxed{S = \{-6 ; 1 ; 3\}}$$

Exercice 4 Analyse .... 5 pts

Sur un segment [AB] de longueur 12, on place un point M.
On construit deux carrés $AMEF$ et $BCDM$.
On pose $x = AM$.



/2 1. Exprimer les aires des carrés $AMEF$ et $BCDM$ en fonction de x.

Aire de $AMEF = x^2$.
Aire de $BCDM = (12-x)^2 = 144 - 2\times 12\times x + x^2 = x^2 - 24x + 144$.

/1 2. On note $f(x)$ la somme des aires des deux carrés.
Prouver que $f(x) = 2x^2 - 24x + 144$.

$f(x) = x^2 + x^2 - 24x + 144 = 2x^2 - 24x + 144$.

/2 3. Déterminer la valeur de x telle que la somme des aires des deux carrés soit minimale. *Justifier*.

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-24}{2\times 2} = 6.$
$\beta = f(\alpha) = f(6) = 2\times 6^2 - 24\times 6 + 144 = 72.$
$a = 2 > 0$, donc $\mathscr{C}_f$ est tournée vers le haut.
Ainsi :

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	72	$\nearrow$	

On en déduit que la somme des aires des deux carrés est minimale lorsque $AM = 6$, soit lorsque le point M est situé au milieu de [AB].

Prénom : . . .
Nom : . . .
Classe : M1

Bilan de Mathématiques (Sujet B)

Durée : 2h30

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice **est autorisé** .*
*Il est rappelé que la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	4	Total
Points	12	7	6	5	30
Note					

Exercice 1 Application directes .... 12 pts

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

/4 1. En justifiant, dresser les tableaux de variations et de signes de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

.

- Tableau de signes :
  $\Delta = 64$.
  On trouve deux racines : 3 et -1.
  $2x^2 - 2x - 12$ est du signe de a (ici $a = 2 > 0$), sauf entre ses racines :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Tableau de variations :
  $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\times 2} = 1$.
  $\beta = f(\alpha) = f(1) = -8$.
  $a > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est une parabole tournée vers le haut.
  On en déduit :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-8	$\nearrow$	

/2 2. Soient $\vec{a}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ dans un repère quelconque du plan.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par :

$$\vec{u} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\begin{aligned}\vec{u} &= -3\vec{a} + 2\vec{b}\\ &= -3\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -3\times 3 + 2\times 3 \\ -3\times 6 + 2\times(-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ -22 \end{pmatrix}$$

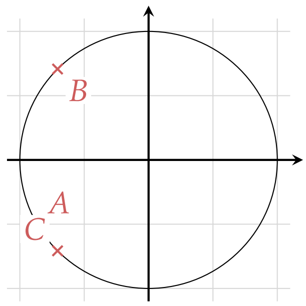
/3 3. Convertir les angles suivants en radians/degrés en indiquant d'abord la valeur exacte, puis en donnant une valeur approchée à 10^{-2} près :

- $65°$
- $\frac{\pi}{10}$ rad
- $15°$

1. $65° = 65 \times \frac{\pi}{180}\,\text{rad} = \frac{13\pi}{36}\,\text{rad} \approx 1{,}13\,\text{rad}$
2. $\frac{\pi}{10}\,\text{rad} = \frac{\pi}{10} \times \frac{180°}{\pi} = 18° = 18°$.
3. $15° = 15 \times \frac{\pi}{180}\,\text{rad} = \frac{\pi}{12}\,\text{rad} \approx 0{,}26\,\text{rad}$

/3 4. Placer **précisément** sur le cercle trigonométrique les points images des réels ci-dessous.

- Point A image de $-\frac{5\pi}{6}$.
- Point B image de $-\frac{5\pi}{4}$
- Point C image de $-\frac{19\pi}{4}$



Exercice 2 Géométrie .... 7 pts

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\, I\,,\, J)$.
Soient $A(5;-1)$, $B(2;3)$ et $C(-6;-2)$.

/1 1. Tracer le repère, et y placer les points A, B et C.

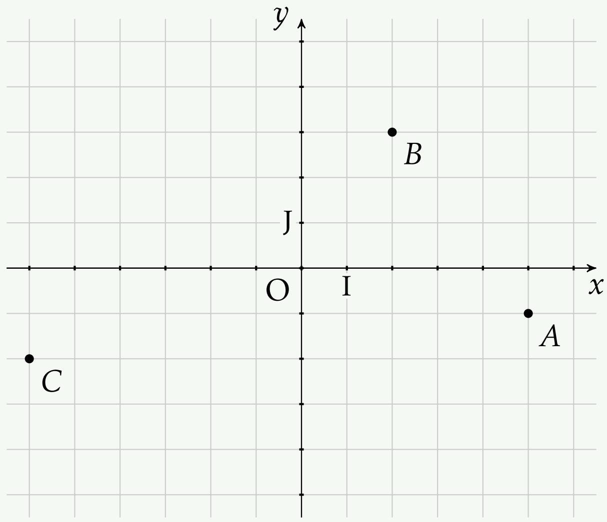
/1,5 2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

/1,5 3. Démontrer que $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$, $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{89}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{122}$.

/1 4. ABC est-il rectangle ? *Justifier*.

/2 5. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1.



2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 2-5 \\ 3-(-1) \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On montre de même : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -11 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   Donc :

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{AB}|| &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2}\\ &= 5\end{aligned}$$

   On montre les autres égalités de la même manière.

4. Le plus grand côté du triangle est $[AC]$.
   $AC^2 = ||\overrightarrow{AC}||^2 = \sqrt{122}^2 = 122$.
   $AB^2 + BC^2 = 5^2 + \sqrt{89}^2 = 25 + 89 = 114$.
   $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$, donc d'après le théorème de Pythagore (sa *contraposée*), ABC n'est pas rectangle.

5. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2-5 = -6 - x_D \\ 3-(-1) = -2 - y_D \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -y_D \\ 6 = -y_D \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = -6 \end{cases}\end{aligned}$$

   Donc $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $D(-3;-6)$.

Exercice 3 Algèbre .... 6 pts

Soit $P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 26x + 30$.

/1 1. Déterminer une racine évidente de $P(x)$.

/5 2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$

1. $P(1) = 2 \times 1^3 - 6 \times 1^2 - 26 \times 1 + 30 = 0$.
   Donc 1 est une racine de P.
2. On en déduit que $P(x)$ est factorisable par $(x-1)$.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -6 & -26 & 30 \\
1 & \downarrow & 2 & -4 & -30 \\
\hline
 & 2 & -4 & -30 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -6x^2 & -26x & +30 & x-1 \\
\cline{5-5}
-2x^3 & +2x^2 & & & 2x^2-4x-30 \\
\cline{1-2}
 & -4x^2 & -26x & & \\
 & 4x^2 & -4x & & \\
\cline{2-3}
 & & -30x & +30 & \\
 & & 30x & -30 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi : $P(x) = (x-1)\left(2x^2-4x-30\right) = 2(x-1)\left(x^2-2x-15\right)$.

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow 2(x-1)\left(x^2-2x-15\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ou } x^2-2x-15 = 0 \end{aligned}$$

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Il s'agit de la racine que l'on connaissait déjà.
- On résout $x^2-2x-15=0$.
  On calcule Δ. On trouve $\Delta = 64$.
  On en déduit que $x^2-2x-15$ a deux racines réelles.

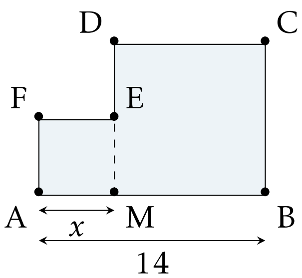
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-2)-\sqrt{64}}{2\times 1} \\ &= -3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-2)+\sqrt{64}}{2\times 1} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Finalement, on a donc :

$$\boxed{S = \{-3\ ;\ 1\ ;\ 5\}}$$

Exercice 4 Analyse .... 5 pts

Sur un segment [AB] de longueur 14, on place un point M.
On construit deux carrés $AMEF$ et $BCDM$.
On pose $x = AM$.



/2 1. Exprimer les aires des carrés $AMEF$ et $BCDM$ en fonction de x.

Aire de $AMEF = x^2$.
Aire de $BCDM = (14-x)^2 = 196 - 2\times 14\times x + x^2 = x^2 - 28x + 196$.

/1 2. On note $f(x)$ la somme des aires des deux carrés.
Prouver que $f(x) = 2x^2 - 28x + 196$.

$f(x) = x^2 + x^2 - 28x + 196 = 2x^2 - 28x + 196$.

/2 3. Déterminer la valeur de x telle que la somme des aires des deux carrés soit minimale.
Justifier.

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-28}{2\times 2} = 7$.
$\beta = f(\alpha) = f(7) = 2\times 7^2 - 28\times 7 + 196 = 98$.
$a = 2 > 0$, donc $\mathscr{C}_f$ est tournée vers le haut.
Ainsi :

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	98	$\nearrow$	

On en déduit que la somme des aires des deux carrés est minimale lorsque $AM = 7$, soit lorsque le point M est situé au milieu de [AB].