Prénom : ...
Nom : ...
Classe : M1

DS de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice **est autorisé** .*
*Il est rappelé que la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

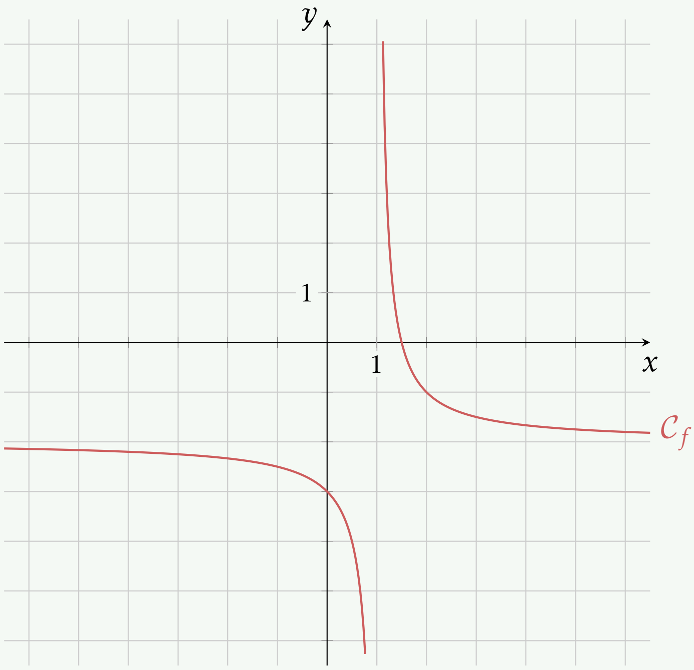
Exercice	1	2	Total
Points	7	6	13
Note			

Exercice 1 .... 7 pts

Soit $f : x \mapsto \frac{-2x+3}{x-1}$.

/1 1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
/2 2. Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé.
/2 3. f est-elle bijective de $]1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$? *Justifier*.
/2 4. Déterminer A et B tels que f soit bijective de A vers B.

1. $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.
   Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. On dresse un tableau de valeurs en pensant bien à étudier la tendance en $-\infty$ et $+\infty$, et au voisinage des valeurs interdites éventuelles :



3. Non car, par exemple, -3 n'a pas d'antécédent par f dans un $]1;+\infty[$.
4. f est par exemple une bijection de :
   - $]1;+\infty[$ vers $]2;+\infty[$
   - $]-\infty;1[$ vers $]-\infty;2[$
   - $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Exercice 2 .... 6 pts

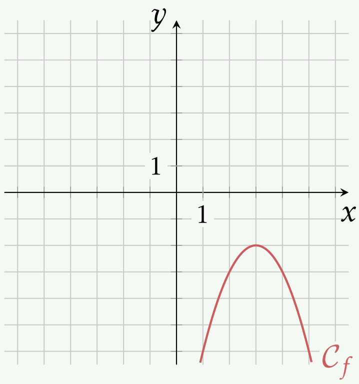
Soit $f : x \mapsto -x^2 + 6x - 11$.

/2 1. Déterminer A et B aussi grands que possible tels que f soit une bijection de A vers B.

/2 2. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x-3)^2 - 2$.

/2 (b) En déduire l'expression de f^{-1} et préciser les ensembles de départ et d'arrivée.

1. $\alpha = -\frac{b}{2a} = 3$ et $\beta = f(\alpha) = f(3) = -2$.
   De plus, $a = -1 < 0$, donc la courbe est tournée vers le bas.



   Par lecture graphique, on peut voir que f est une bijection de $[3;+\infty[$ vers $]-\infty;-2[$.
2. On peut au choix :
   (a) Développer l'expression de l'énoncé pour vérifier qu'elle est bien égale à $f(x)$.
   (b) Trouver la forme canonique de $f(x)$ en cherchant α et β.

   Le plus simple est de développer $-(x-3)^2 - 2$.

$$\begin{aligned} -(x-3)^2 - 2 &= -\left(x^2 + 6x + 9\right) - 2 \\ &= -x^2 - 6x - 9 - 2 \\ &= -x^2 + 6x - 11 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in]3;+\infty[$ et pour tout $y \in]-\infty;-2[$:

$$\begin{aligned} y = -(x-3)^2 - 2 &\Leftrightarrow y + 2 = -(x-3)^2 \\ &\Leftrightarrow -y - 2 = (x-3)^2 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{-y-2} + 3 \end{aligned}$$

   Donc :

$$\begin{aligned} f^{-1} :]3;+\infty[&\longrightarrow]-\infty;-2[\\ x &\longmapsto \sqrt{-x-2} + 3 \end{aligned}$$

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : M1

DS de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice **est autorisé** .*
*Il est rappelé que la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	Total
Points	7	6	13
Note			

Exercice 1 .... 7 pts

Soit $f : x \mapsto \frac{2x+3}{x+1}$.

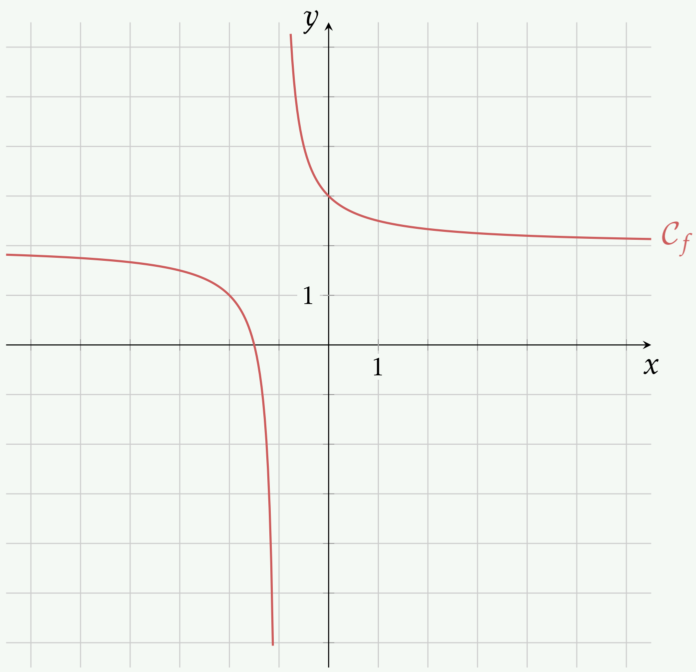
/1 1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

/2 2. Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé.

/2 3. f est-elle bijective de $]-1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$? *Justifier*.

/2 4. Déterminer A et B tels que f soit bijective de A vers B.

1. $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.
   Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. On dresse un tableau de valeurs en pensant bien à étudier la tendance en $-\infty$ et $+\infty$, et au voisinage des valeurs interdites éventuelles :



3. Non car, par exemple, -3 n'a pas d'antécédent par f dans un $]1;+\infty[$.
4. f est par exemple une bijection de :
   - $]1;+\infty[$ vers $]2;+\infty[$
   - $]-\infty;1[$ vers $]-\infty;2[$
   - $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Exercice 2 .... 6 pts

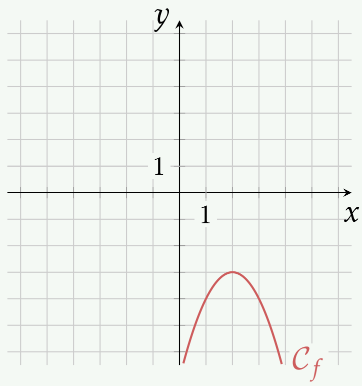
Soit $f : x \mapsto -x^2 + 4x - 7$.

/2 1. Déterminer A et B aussi grands que possible tels que f soit une bijection de A vers B.

/2 2. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x-2)^2 - 3$.

/2 (b) En déduire l'expression de f^{-1} et préciser les ensembles de départ et d'arrivée.

1. $\alpha = -\frac{b}{2a} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = f(2) = -3$.
   De plus, $a = -1 < 0$, donc la courbe est tournée vers le bas.



   Par lecture graphique, on peut voir que f est une bijection de $[2;+\infty[$ vers $]-\infty;-3[$.

2. On peut au choix :
   (a) Développer l'expression de l'énoncé pour vérifier qu'elle est bien égale à $f(x)$.
   (b) Trouver la forme canonique de $f(x)$ en cherchant α et β.

   Le plus simple est de développer $-(x-3)^2 - 2$.

$$\begin{aligned} -(x-2)^2 - 3 &= -\left(x^2 + 4x + 4\right) - 3 \\ &= -x^2 - 4x - 4 - 3 \\ &= -x^2 + 4x - 7 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in]2;+\infty[$ et pour tout $y \in]-\infty;-3[$:

$$\begin{aligned} y = -(x-2)^2 - 3 &\Leftrightarrow y + 3 = -(x-2)^2 \\ &\Leftrightarrow -y - 3 = (x-2)^2 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{-y-3} + 2 \end{aligned}$$

   Donc :

$$\begin{aligned} f^{-1} :]2;+\infty[&\longrightarrow]-\infty;-3[\\ x &\longmapsto \sqrt{-x-3} + 2 \end{aligned}$$