Prénom : ...
Nom : ...
Classe : M1

DS de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice **est autorisé** .*
*Il est rappelé que la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	Total
Points	3	3	5	11
Note				

Exercice 1 .... 3 pts

Factoriser les expressions suivantes :

/1 1. x^2-9.
/1 2. $x^3+6x^2+12x+8$.
/1 3. $\left(x^3-27\right)\left(x^2+8x+16\right)$.

1. $x^2-9=\boxed{(x-3)(x+3)}$
2. $x^3+6x^2+12x+8=\boxed{(x+2)^3}$
3. $\left(x^3-27\right)\left(x^2+8x+16\right)=(x-3)\left(x^2+3x+3^2\right)(x+4)^2=\boxed{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)(x+4)^2}$

Exercice 2 .... 3 pts

Soient $A(x)=x^3+2x^2+3x+4$ et $B(x)=x+2$.
Avec la méthode de votre choix, effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$, puis en déduire $A(x)$ sous la forme $B(x)\times Q(x)+R(x)$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & \downarrow & -2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & -2 \end{array}.$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2+3x+4 & x+2 \\ \cline{2-2} -x^3-2x^2 \qquad\qquad & x^2+3 \\ \cline{1-1} 3x+4 & \\ -3x-6 & \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

On en déduit $A(x)=(x+2)\times\left(x^2+3\right)-2$.

Exercice 3 .... 5 pts

Soit $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

/1 1. Déterminer une racine évidente de $P(x)$.
/2 2. Factoriser $P(x)$.
/2 3. Résoudre l'équation $P(x)=0$

1. $P(1)=1^3-2\times1^2-5\times1+6=0$.
   Donc 1 est une racine de P.
2. On en déduit que $P(x)$ est factorisable par $(x-1)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & \downarrow & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & & x-1 \\ \cline{3-3} -x^3 + x^2 & & x^2 - x - 6 \\ \cline{1-1} -x^2 - 5x & & \\ x^2 - x & & \\ \cline{1-1} -6x + 6 & & \\ 6x - 6 & & \\ \cline{1-1} 0 & & \end{array}$$

Ainsi : $P(x) = (x-1)\left(x^2 - x - 6\right)$.

3.

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-x-6\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } x^2 - x - 6 = 0 \end{aligned}$$

- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Il s'agit de la racine que l'on connaissait déjà.
  On résout $x^2 - x - 6 = 0$.
  On calcule Δ. On trouve $\Delta = 25$.
  On en déduit que $x^2 - x - 6$ a deux racines réelles.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Finalement, on a donc :

$$\boxed{S = \{-2\ ;\ 1\ ;\ 3\}}$$

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : M1

DS de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice **est autorisé** .*
*Il est rappelé que la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	Total
Points	3	3	5	11
Note				

Exercice 1 .... 3 pts

Factoriser les expressions suivantes :

/1 1. $x^2 - 16$.
/1 2. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$.
/1 3. $\left(x^3 - 8\right)\left(x^2 + 10x + 25\right)$.

1. $x^2 - 16 = \boxed{(x-4)(x+4)}$
2. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = \boxed{(x+3)^3}$
3. $\left(x^3 - 8\right)\left(x^2 + 10x + 25\right) = (x-2)\left(x^2 + 2x + 2^2\right)(x+5)^2 = \boxed{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)(x+5)^2}$

Exercice 2 .... 3 pts

Soient $A(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ et $B(x) = x + 2$.
Avec la méthode de votre choix, effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$, puis en déduire $A(x)$ sous la forme $B(x) \times Q(x) + R(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & \downarrow & -2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & \vert\, -2 \end{array}.$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + 3x + 4 & x+2 \\ \cline{2-2} -x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & x^2 + 3 \\ \cline{1-1} 3x + 4 & \\ -3x - 6 & \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

On en déduit $A(x) = (x+2) \times \left(x^2 + 3\right) - 2$.

Exercice 3 .... 5 pts

Soit $P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$.

/1 1. Déterminer une racine évidente de $P(x)$.
/2 2. Factoriser $P(x)$.
/2 3. Résoudre l'équation $P(x) = 0$

1. $P(1) = 1^3 + 1^2 - 10 \times 1 + 8 = 0$.
   Donc 1 est une racine de P.
2. On en déduit que $P(x)$ est factorisable par $(x-1)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -10 & 8 \\ 1 & \downarrow & 1 & 2 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +x^2 & -10x & +8 & x-1 \\ \cline{5-5} -x^3 & +x^2 & & & x^2+2x-8 \\ \cline{1-2} & 2x^2 & -10x & & \\ & -2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3} & & -8x & +8 & \\ & & 8x & -8 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Ainsi : $P(x) = (x-1)\left(x^2+2x-8\right)$.

3.

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+2x-8\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ou } x^2+2x-8 = 0 \end{aligned}$$

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Il s'agit de la racine que l'on connaissait déjà.
  On résout $x^2+2x-8=0$.
  On calcule Δ. On trouve $\Delta = 36$.
  On en déduit que x^2+2x-8 a deux racines réelles.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2-\sqrt{36}}{2\times 1} \\ &= -4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2+\sqrt{36}}{2\times 1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Finalement, on a donc :

$$\boxed{S = \{-4\ ;\ 1\ ;\ 2\}}$$