Prénom : ...
Nom : ...
Classe : M1

Bilan de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice **est autorisé** .*
*Il est rappelé que la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	4	5	Total
Points	15	10	4	7	4	40
Note						

Exercice 1 .... 15 pts

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1;3)$, $B(5;0)$ et $C(9;3)$.

/3 1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

/3 2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par C et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

/1 3. Démontrer que les droites (d) et (AB) ne sont pas parallèles.

/2 4. Démontrer que les droites (d) et (AB) se coupent en $E(3;1)$.

/1 5. Les droites (d) et (AB) sont-elles perpendiculaires ?

/3 6. Calculer l'angle aigu formé par les droites (d) et (AB).

/2 7. Calculer l'aire du triangle BEC.

1. $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB).
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-(-1)\\0-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ avec $a = -3$ et $b = -6$.
   On en déduit que (AB) a pour équation cartésienne $-3x - 6y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
   De plus, $A \in (AB)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (AB).
   On résout $-3x_A - 6y_A + c = 0$ et on trouve $c = 15$.
   On en déduit que (AB) a pour équation $-3x - 6y + 15 = 0$.

2. $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ avec $a = -1$ et $b = 3$.
   Donc (d) a pour équation $-x + 3y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.
   De plus $C \in (d)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d).
   On trouve $c = 0$.
   (d) a pour équation $-x + 3y = 0$.

3. On déduit de l'équation de (d) que $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right) = \begin{vmatrix}6 & -3\\-3 & -1\end{vmatrix}$$
$$= 6 \times (-1) - (-3) \times (-3)$$
$$= -15$$

$\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right) \neq 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.
On en déduit que les droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles.

4. On résout le système $\begin{cases} -3x - 6y + 15 = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} -3x - 6y + 15 = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y + 5 = 0 & L_1 \div 3 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5y + 5 = 0 & L_1 - L_2 \\ x = 3y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \times 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Donc (AB) et (d) s'interesectent en $E(3;1)$.

5. $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 6 \times (-3) + (-3) \times (-1) = -15$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} \neq 0$, donc les droites (AB) et (d) ne sont pas perpendiculaires.

6. L'angle formé par les droites (AB) et (d) est l'angle formé par leurs vecteurs directeurs, soit $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ et il s'agit ici de l'angle $\widehat{BEC}$.
On sait que $\widehat{BEC} = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\vec{u}\|}\right)$.
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5}$.
$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.
Ainsi :
$$\begin{aligned} \widehat{BEC} &= \arccos\left(\frac{-15}{3\sqrt{5} \times \sqrt{10}}\right) \\ &= 45° \end{aligned}$$

7. Notons $\mathcal{A}$ l'aire du triangle BEC.
Le triangle BEC est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EC}$.
$\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}\right)\right|}{2} \\ &= \frac{10}{2} \\ &= \boxed{5} \end{aligned}$$

Exercice 2 .... 10 pts

Soit $f : x \mapsto 2x^2 + 6x - 1$.

/0,5 1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

/2 2. Déterminer les zéros de f et en déduire la forme factorisée de f.

/1 3. Dresser le tableau de signes de f.

/1,5 4. Déterminer les coordonnées du sommet du graphe de f et en déduire la forme canonique de f.

/1 5. Dresser le tableau de variations de f.

/2 6. Représenter le graphe de f dans un repère orthonormé.

/2 7. Déterminer deux ensembles A et B, aussi grands que possibles, tels que f soit bijective de A vers B, puis déterminer l'expression de f^{-1}, fonction réciproque de f définie de B vers A.

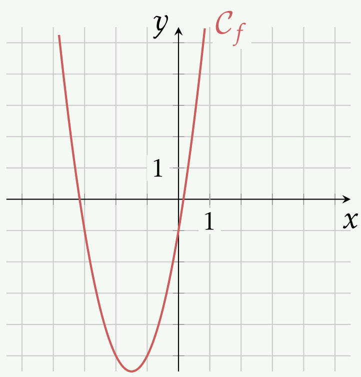
1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. $\Delta = 44$.
   $\Delta > 0$, donc f a deux zéros réels.
   $x_1 = \frac{-6-\sqrt{44}}{2\times 2} = \frac{-6-2\sqrt{11}}{4} = \frac{-3-\sqrt{11}}{2}$.
   $x_2 = \frac{-6+\sqrt{44}}{2\times 2} = \frac{-6+2\sqrt{11}}{4} = \frac{-3+\sqrt{11}}{2}$.
   On en déduit : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = 2\left(x+\frac{3+\sqrt{11}}{2}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{11}}{2}\right)$.
3.

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{11}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. $\alpha = \frac{-b}{2a} = -\frac{3}{2}$.
   $\beta = f(\alpha) = -\frac{11}{2}$.
   On en déduit $f(x) = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}$.
5. $a = 2 > 0$, donc la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{11}{2}$	$\nearrow$	

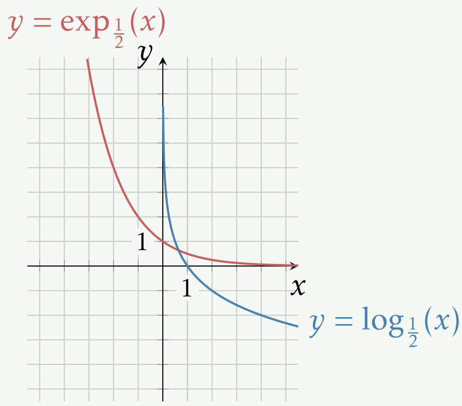
6. On sait que la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en $\frac{-3-\sqrt{11}}{2} \approx -3{,}16$ et en $\frac{-3+\sqrt{11}}{2} \approx 0{,}16$.
   On connaît également les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}_f$.
   De plus, on trouve facilement $f(0) = -1$, donc $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en -1.
   Pour tracer la courbe encore plus précisément, on peut calculer autant d'autres images qu'on le souhaite.
   La courbe ressemble finalement à :



Exercice 3 . . . . 4 pts

Tracer le graphe des fonction $\log_{\frac{1}{2}}$ et $\exp_{\frac{1}{2}}$ dans un repère orthonormé.

Rappel : $\exp_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
On dresse un tableau de valeurs pour cette fonction, puis on sait que $\log_{\frac{1}{2}}$ en est la réciproque, ce qui permet d'en déduire un tableau de valeurs instantanément.
Par ailleurs, on est censé obtenir comme axe de symétries des deux courbes la droite d'équation $y = x$.



Exercice 4 .... 7 pts

Résoudre les équations suivantes :

/2 1. $1,5^x = 5$

/2 2. $\ln\left(x^2\right) = 5$

/3 3. $10^{x+1} = 7 \times 2^x$

1. $E_D = \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1,5^x = 5 &\Leftrightarrow \log\left(1,5^x\right) = \log(5) \\ &\Leftrightarrow x\log(1,5) = \log(5) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\log(5)}{\log(1,5)} \end{aligned}$$

   $S = \left\{\frac{\log(5)}{\log(1,5)}\right\}$

2. $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
   $E_D = \mathbb{R}^*$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} \ln\left(x^2\right) = 5 &\Leftrightarrow x^2 = \mathrm{e}^5 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\mathrm{e}^5} \ \text{ ou } \ x = -\sqrt{\mathrm{e}^5} \end{aligned}$$

$$S = \left\{-\sqrt{\mathrm{e}^5}\ ;\ \sqrt{\mathrm{e}^5}\right\}$$

3. $E_D = \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 10^{x+1} = 7 \times 2^x &\Leftrightarrow \log\left(10^{x+1}\right) = \log\left(7 \times 2^x\right) \\ &\Leftrightarrow x + 1 = \log(7) + \log\left(2^x\right) \\ &\Leftrightarrow x + 1 = \log(7) + x\log(2) \\ &\Leftrightarrow x - x\log(2) = \log(7) - 1 \\ &\Leftrightarrow x\left(1 - \log(2)\right) = \log(7) - 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log(7)-1}{1-\log(2)}$$

$$S = \left\{\frac{\log(7)-1}{1-\log(2)}\right\}$$

Exercice 5 .... 4 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{x-3} \leqslant \frac{x+2}{4x+1}$$

$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.
$4x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$.
Donc $E_D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4};3\right\}$.
Pour tout $x \in E_D$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-3} \leqslant \frac{x+2}{4x+1} &\Leftrightarrow \frac{1}{x-3} - \frac{x+2}{4x+1} \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow \frac{4x+1-(x+2)(x-3)}{(x-3)(4x+1)} \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow \frac{4x+1-(x^2-3x+2x-6)}{(x-3)(4x+1)} \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow \frac{4x+1-x^2+x+6}{(x-3)(4x+1)} \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow \frac{-x^2+5x+7}{(x-3)(4x+1)} \leqslant 0
\end{aligned}$$

On étudie le signe de $-x^2+5x+7$.
Après calculs : $\Delta = 53$.
$\Delta > 0$, donc $-x^2+5x+7$ a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{53}}{2\times(-1)} = \frac{5+\sqrt{53}}{2} \qquad x_2 = \frac{-5+\sqrt{53}}{2\times(-1)} = \frac{5-\sqrt{53}}{2}$$

$-x^2+5x+7$ est du signe de -1 sauf entre ses racines, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{53}}{2}$		$-\frac{1}{4}$		3		$\frac{5+\sqrt{53}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+5x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{-x^2+5x+7}{(x-3)(4x+1)}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

On en déduit :

$$\boxed{S = \left]-\infty\,;\,\frac{5-\sqrt{53}}{2}\right] \cup \left]-\frac{1}{4};3\right[\cup \left[\frac{5+\sqrt{53}}{2};+\infty\right[}$$

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : M1

Bilan de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice* ***est autorisé*** *.*
Il est rappelé que la qualité de la ***rédaction****, la* ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	4	5	Total
Points	15	10	4	7	4	40
Note						

Exercice 1 .... 15 pts

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1;3)$, $B(5;0)$ et $C(9;3)$.

/3 1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

/3 2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par C et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

/1 3. Démontrer que les droites (d) et (AB) ne sont pas parallèles.

/2 4. Démontrer que les droites (d) et (AB) se coupent en $E(3;1)$.

/1 5. Les droites (d) et (AB) sont-elles perpendiculaires ?

/3 6. Calculer l'angle aigu formé par les droites (d) et (AB).

/2 7. Calculer l'aire du triangle BEC.

1. $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB).
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-(-1)\\0-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ avec $a=-3$ et $b=-6$.
   On en déduit que (AB) a pour équation cartésienne $-3x-6y+c=0$, avec $c\in\mathbb{R}$.
   De plus, $A\in(AB)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (AB).
   On résout $-3x_A-6y_A+c=0$ et on trouve $c=15$.
   On en déduit que (AB) a pour équation $-3x-6y+15=0$.

2. $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ avec $a=-1$ et $b=3$.
   Donc (d) a pour équation $-x+3y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$.
   De plus $C\in(d)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d).
   On trouve $c=0$.
   (d) a pour équation $-x+3y=0$.

3. On déduit de l'équation de (d) que $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}\right) &= \begin{vmatrix}6 & -3\\-3 & -1\end{vmatrix}\\ &= 6\times(-1)-(-3)\times(-3)\\ &= -15\end{aligned}$$

$\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right) \neq 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.
On en déduit que les droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles.

4. On résout le système $\begin{cases} -3x - 6y + 15 = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} -3x - 6y + 15 = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y + 5 = 0 & L_1 \div 3 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -5y + 5 = 0 & L_1 - L_2 \\ x = 3y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \times 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc (AB) et (d) s'interesectent en $E(3;1)$.

5. $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 6 \times (-3) + (-3) \times (-1) = -15$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} \neq 0$, donc les droites (AB) et (d) ne sont pas perpendiculaires.

6. L'angle formé par les droites (AB) et (d) est l'angle formé par leurs vecteurs directeurs, soit $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ et il s'agit ici de l'angle $\widehat{BEC}$.
On sait que $\widehat{BEC} = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\vec{u}\|}\right)$.
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5}$.
$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\widehat{BEC} &= \arccos\left(\frac{-15}{3\sqrt{5} \times \sqrt{10}}\right) \\
&= 45°
\end{aligned}$$

7. Notons $\mathcal{A}$ l'aire du triangle BEC.
Le triangle BEC est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EC}$.
$\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}\right)\right|}{2} \\
&= \frac{10}{2} \\
&= \boxed{5}
\end{aligned}$$

Exercice 2 .... 10 pts

Soit $f : x \mapsto 2x^2 + 6x - 1$.

/0,5 1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

/2 2. Déterminer les zéros de f et en déduire la forme factorisée de f.

/1 3. Dresser le tableau de signes de f.

/1,5 4. Déterminer les coordonnées du sommet du graphe de f et en déduire la forme canonique de f.

/1 5. Dresser le tableau de variations de f.

/2 6. Représenter le graphe de f dans un repère orthonormé.

/2 7. Déterminer deux ensembles A et B, aussi grands que possibles, tels que f soit bijective de A vers B, puis déterminer l'expression de f^{-1}, fonction réciproque de f définie de B vers A.

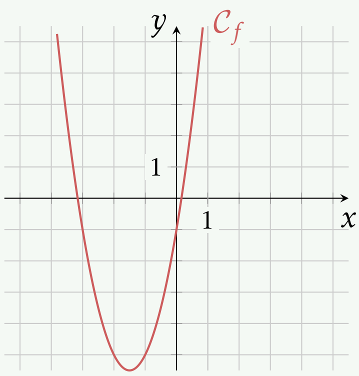
1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. $\Delta = 44$.
   $\Delta > 0$, donc f a deux zéros réels.
   $x_1 = \frac{-6-\sqrt{44}}{2\times 2} = \frac{-6-2\sqrt{11}}{4} = \frac{-3-\sqrt{11}}{2}$.
   $x_2 = \frac{-6+\sqrt{44}}{2\times 2} = \frac{-6+2\sqrt{11}}{4} = \frac{-3+\sqrt{11}}{2}$.
   On en déduit : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = 2\left(x+\frac{3+\sqrt{11}}{2}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{11}}{2}\right)$.
3.

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{11}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. $\alpha = \frac{-b}{2a} = -\frac{3}{2}$.
   $\beta = f(\alpha) = -\frac{11}{2}$.
   On en déduit $f(x) = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}$.
5. $a = 2 > 0$, donc la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{11}{2}$	$\nearrow$	

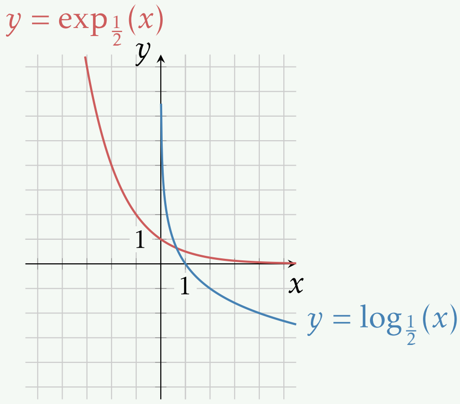
6. On sait que la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en $\frac{-3-\sqrt{11}}{2} \approx -3{,}16$ et en $\frac{-3+\sqrt{11}}{2} \approx 0{,}16$.
   On connaît également les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}_f$.
   De plus, on trouve facilement $f(0) = -1$, donc $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en -1.
   Pour tracer la courbe encore plus précisément, on peut calculer autant d'autres images qu'on le souhaite.
   La courbe ressemble finalement à :



Exercice 3 .... 4 pts

Tracer le graphe des fonction $\log_{\frac{1}{2}}$ et $\exp_{\frac{1}{2}}$ dans un repère orthonormé.

Rappel : $\exp_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
On dresse un tableau de valeurs pour cette fonction, puis on sait que $\log_{\frac{1}{2}}$ en est la réciproque, ce qui permet d'en déduire un tableau de valeurs instantanément.
Par ailleurs, on est censé obtenir comme axe de symétries des deux courbes la droite d'équation $y = x$.



Exercice 4 .... 7 pts

Résoudre les équations suivantes :

/2 1. $1,5^x = 5$

/2 2. $\ln\left(x^2\right) = 5$

/3 3. $10^{x+1} = 7 \times 2^x$

1. $E_D = \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} 1,5^x = 5 &\Leftrightarrow \log\left(1,5^x\right) = \log(5) \\ &\Leftrightarrow x\log(1,5) = \log(5) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\log(5)}{\log(1,5)} \end{aligned}$$
   $S = \left\{\frac{\log(5)}{\log(1,5)}\right\}$
2. $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
   $E_D = \mathbb{R}^*$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$\begin{aligned} \ln\left(x^2\right) = 5 &\Leftrightarrow x^2 = \mathrm{e}^5 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\mathrm{e}^5} \text{ ou } x = -\sqrt{\mathrm{e}^5} \end{aligned}$$
$$S = \left\{-\sqrt{\mathrm{e}^5}\ ;\ \sqrt{\mathrm{e}^5}\right\}$$
3. $E_D = \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} 10^{x+1} = 7 \times 2^x &\Leftrightarrow \log\left(10^{x+1}\right) = \log\left(7 \times 2^x\right) \\ &\Leftrightarrow x + 1 = \log(7) + \log\left(2^x\right) \\ &\Leftrightarrow x + 1 = \log(7) + x\log(2) \\ &\Leftrightarrow x - x\log(2) = \log(7) - 1 \\ &\Leftrightarrow x\left(1 - \log(2)\right) = \log(7) - 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log(7)-1}{1-\log(2)}$$

$$S = \left\{\frac{\log(7)-1}{1-\log(2)}\right\}$$

Exercice 5 .... 4 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{x-3} \leqslant \frac{x+2}{4x+1}$$

$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.
$4x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$.
Donc $E_D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4};3\right\}$.
Pour tout $x \in E_D$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-3} \leqslant \frac{x+2}{4x+1} &\Leftrightarrow \frac{1}{x-3} - \frac{x+2}{4x+1} \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{4x+1-(x+2)(x-3)}{(x-3)(4x+1)} \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{4x+1-(x^2-3x+2x-6)}{(x-3)(4x+1)} \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{4x+1-x^2+x+6}{(x-3)(4x+1)} \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2+5x+7}{(x-3)(4x+1)} \leqslant 0\end{aligned}$$

On étudie le signe de $-x^2+5x+7$.
Après calculs : $\Delta = 53$.
$\Delta > 0$, donc $-x^2+5x+7$ a deux racines réelles :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-5-\sqrt{53}}{2\times(-1)}\\ &= \frac{5+\sqrt{53}}{2}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}x_2 &= \frac{-5+\sqrt{53}}{2\times(-1)}\\ &= \frac{5-\sqrt{53}}{2}\end{aligned}$$

$-x^2+5x+7$ est du signe de -1 sauf entre ses racines, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{53}}{2}$		$-\frac{1}{4}$		3		$\frac{5+\sqrt{53}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+5x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{-x^2+5x+7}{(x-3)(4x+1)}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

On en déduit :

$$\boxed{S = \left]-\infty\,;\,\frac{5-\sqrt{53}}{2}\right] \cup \left]-\frac{1}{4};3\right[\cup \left[\frac{5+\sqrt{53}}{2};+\infty\right[}$$