Prénom : ...
Nom : ...
Classe : M1

Bilan de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice* ***est autorisé*** *.*
Il est rappelé que la qualité de la ***rédaction****, la* ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	4	5	Total
Points	4	8	6	9	5	32
Note						

Exercice 1 .... 4 pts

/2 1. Soit $f : x \mapsto 4(x+2)^2+3$.
Dresser le tableau de variations de f.

/2 2. Soit $g : x \mapsto -3(x-2)(x+5)$.
Dresser le tableau de signes de g.

1.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	

2.

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 2 .... 8 pts

Soit f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

/2 1. (a) Déterminer les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}_f$.
/1 (b) Dresser le tableau de variations de f.
/2 2. (a) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
/1 (b) Dresser le tableau de signes de f.
/2 3. Le plus précisément possible, tracer une allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

1. (a) $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\times\frac{1}{2}} = -3$.
$\beta = f(\alpha) = f(-3) = -2$.
Le sommet de $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées $S(-3;-2)$.
(b)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

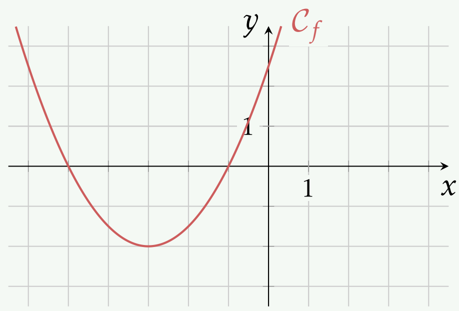
2. (a) $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = 4.$
   $\Delta > 0$, donc $f(x) = 0$ a deux solutions réelles.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{4}}{2\times\frac{1}{2}} = -5 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{4}}{2\times\frac{1}{2}} = -1$$

   (b)

x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3.



Exercice 3 .... 6 pts

Soit $P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 12x - 16$.

/1 1. Déterminer une racine évidente de $P(x)$.

/5 2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$

1. $P(-1) = 2 \times (-1)^3 + 6 \times (-1)^2 - 12 \times (-1) - 16 = 0.$
   Donc -1 est une racine de P.
2. On en déduit que $P(x)$ est factorisable par $(x+1)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 6 & -12 & -16 \\ -1 & \downarrow & -2 & -4 & 16 \\ \hline & 2 & 4 & -16 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^3 + 6x^2 & -12x & -16 & x+1 \\ \cline{4-4} -2x^3 - 2x^2 & & & 2x^2 + 4x - 16 \\ \cline{1-1} 4x^2 & -12x & & \\ -4x^2 & -4x & & \\ \cline{1-2} & -16x & -16 & \\ & 16x & +16 & \\ \cline{2-3} & & 0 & \end{array}$$

Ainsi : $P(x) = (x+1)\left(2x^2 + 4x - 16\right) = 2(x+1)\left(x^2 + 2x - 8\right)$.

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow 2(x+1)\left(x^2+2x-8\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ ou } x^2 + 2x - 8 = 0 \end{aligned}$$

- $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Il s'agit de la racine que l'on connaissait déjà.

- On résout $x^2+2x-8=0$.
  On calcule Δ. On trouve $\Delta=36$.
  On en déduit que x^2+2x-8 a deux racines réelles.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{36}}{2\times 1}=-4 \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+\sqrt{36}}{2\times 1}=2$$

Finalement, on a donc :

$$\boxed{S=\{-4\ ;\ -1\ ;\ 2\}}$$

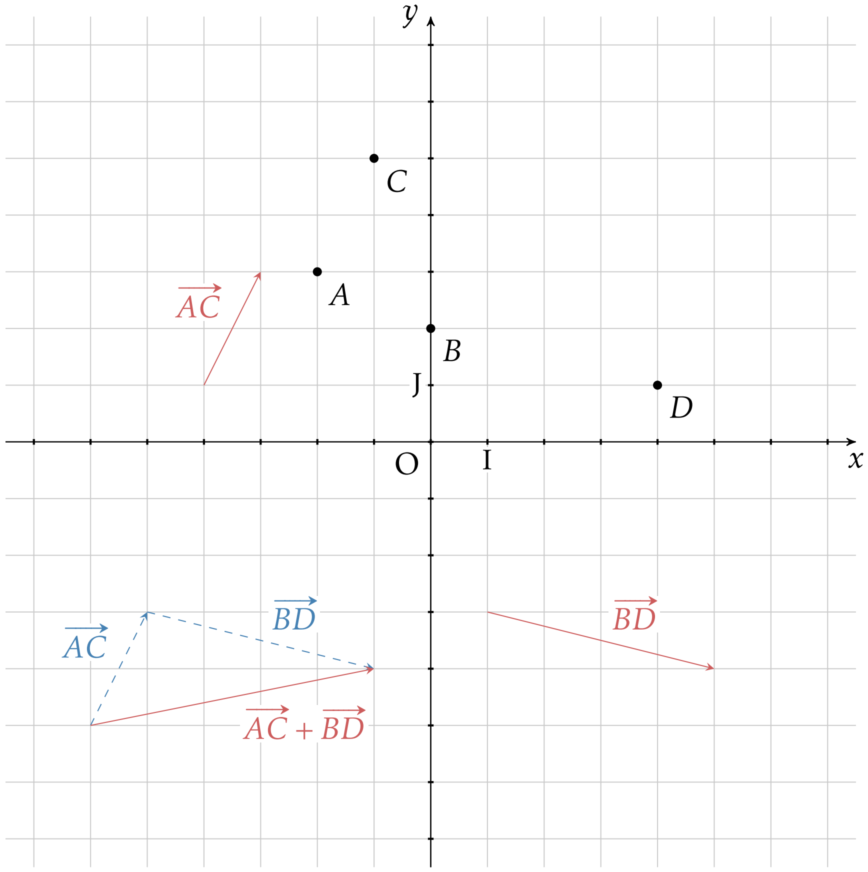
Exercice 4 .... 9 pts

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ,\ J)$, soient :

$$A(-2;3)\ ;\ B(0;2)\ ;\ C(-1;5)\ ;\ D(4;1)$$

/2 1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$.

/3 2. Dans le repère ci-dessous, tracer un représentant des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.



/2 3. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u}=3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\8\end{pmatrix}$.

/2 (b) Déterminer les coordonnées du point E défini par $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BD}$.

1. $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-(-2)\\5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}x_B-x_C\\y_B-y_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-(-1)\\2-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

2.

3. (a) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BD} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E - x_A = -5 \\ y_E - y_A = 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E - (-2) = -5 \\ y_E - 3 = 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -7 \\ y_E = 11 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $E(-7;11)$.

Exercice 5 .... 5 pts

1. Donner la valeur exacte en degrés/radians des angles suivants, sous la forme la plus simplifiée possible.

/1 (a) $\frac{\pi}{10}$ rad

$\frac{\pi}{10}\text{ rad} = \frac{\pi}{10} \times \frac{180°}{\pi} = \boxed{18°}$

/1 (b) 100°

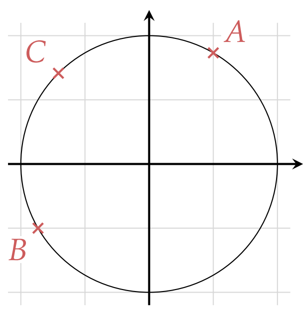
$100° = 100 \times \frac{\pi}{180}\text{ rad} = \boxed{\frac{5\pi}{9}\text{ rad}}$.

/3 2. Placer sur le cercle trigonométrique ci-dessous les points images des réels suivants. *Un placement assez précis est attendu. Le quadrillage sur la figure a été tracé dans ce but. Il n'y a ainsi pas nécessairement besoin d'un rapporteur.*

(a) $\frac{\pi}{3}$

(b) $-\frac{5\pi}{6}$

(c) $\frac{27\pi}{4}$



Prénom : ...
Nom : ...
Classe : M1

Bilan de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice* ***est autorisé*** *.*
Il est rappelé que la qualité de la ***rédaction****, la* ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	4	5	Total
Points	4	8	6	9	5	32
Note						

Exercice 1 .... 4 pts

/2 1. Soit $f : x \mapsto 2(x+3)^2+5$.
Dresser le tableau de variations de f.

/2 2. Soit $g : x \mapsto -5(x-1)(x+2)$.
Dresser le tableau de signes de g.

1.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	5	$\nearrow$	

2.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 2 .... 8 pts

Soit f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

/2 1. (a) Déterminer les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}_f$.
/1 (b) Dresser le tableau de variations de f.
/2 2. (a) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
/1 (b) Dresser le tableau de signes de f.
/2 3. Le plus précisément possible, tracer une allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

1. (a) $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = -1$.
$\beta = f(\alpha) = f(-1) = 2$.
Le sommet de $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées $S(-1;2)$.
(b)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

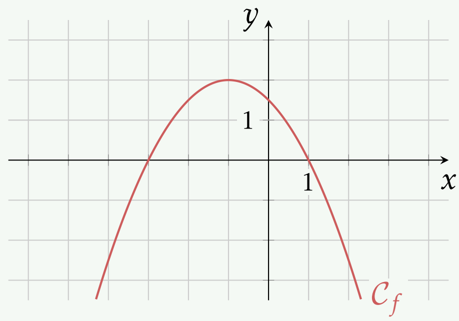
2. (a) $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{2} = 4.$
   $\Delta > 0$, donc $f(x) = 0$ a deux solutions réelles.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-1)-\sqrt{4}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-1)+\sqrt{4}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= -3 \end{aligned}$$

   (b)

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3.



Exercice 3 . . . . 6 pts

Soit $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 26x - 20$.

/1 1. Déterminer une racine évidente de $P(x)$.

/5 2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$

1. $P(-1) = 2 \times (-1)^3 - 4 \times (-1)^2 - 26 \times (-1) - 20 = 0.$
   Donc -1 est une racine de P.
2. On en déduit que $P(x)$ est factorisable par $(x + 1)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -4 & -26 & -20 \\ -1 & \downarrow & -2 & 6 & 20 \\ \hline & 2 & -6 & -20 & \big|\; 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 4x^2 - 26x - 20 & x+1 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 6x - 20 \\ \cline{1-1} -6x^2 - 26x & \\ 6x^2 + 6x & \\ \cline{1-1} -20x - 20 & \\ 20x + 20 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

   Ainsi : $P(x) = (x + 1)\left(2x^2 - 6x - 20\right) = 2(x + 1)\left(x^2 - 3x - 10\right)$.

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow 2(x+1)\left(x^2-3x-10\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+1 = 0 \;\text{ ou }\; x^2 - 3x - 10 = 0 \end{aligned}$$

- $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. Il s'agit de la racine que l'on connaissait déjà.
- On résout $x^2-3x-10=0$.
  On calcule Δ. On trouve $\Delta = 49$.
  On en déduit que $x^2-3x-10$ a deux racines réelles.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{49}}{2\times 1} = -2 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{49}}{2\times 1} = 5$$

Finalement, on a donc :

$$\boxed{S = \{-2\ ;\ -1\ ;\ 5\}}$$

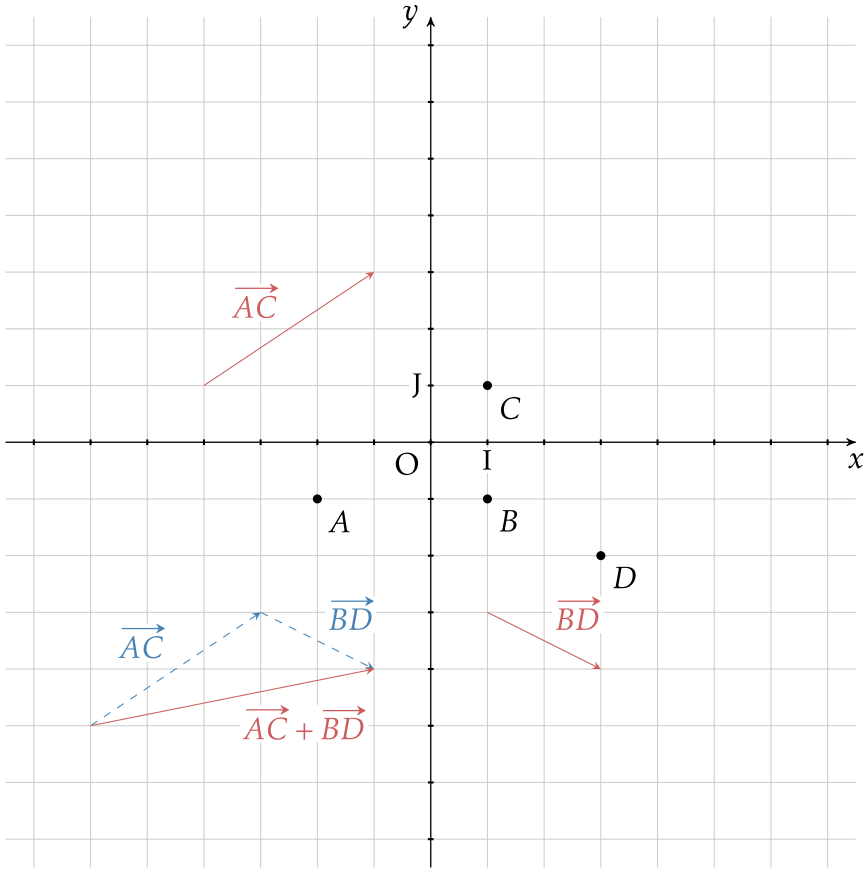
Exercice 4 .... 9 pts

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ,\ J)$, soient :

$$A(-2;-1)\ ;\ B(1;-1)\ ;\ C(1;1)\ ;\ D(3;-2)$$

/2 1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$.

/3 2. Dans le repère ci-dessous, tracer un représentant des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.



/2 3. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = -2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}$.

/2 (b) Déterminer les coordonnées du point E défini par $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{BD}$.

1. $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-(-2)\\1-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}x_B-x_C\\y_B-y_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1\\-1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.

2.

3. (a) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= -2 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E - x_A = 2 \\ y_E - y_A = -8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E - (-2) = 2 \\ y_E - (-1) = -8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 0 \\ y_E = -9 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $E(0;-9)$.

Exercice 5 .... 5 pts

1. Donner la valeur exacte en degrés/radians des angles suivants, sous la forme la plus simplifiée possible.

/1 (a) $\frac{\pi}{20}$ rad

$\frac{\pi}{20}$ rad $= \frac{\pi}{20} \times \frac{180\,°}{\pi} = \boxed{9°}$

/1 (b) $80°$

$80° = 80 \times \frac{\pi}{180}$ rad $= \boxed{\frac{4\pi}{9}\text{ rad}}$.

/3 2. Placer sur le cercle trigonométrique ci-dessous les points images des réels suivants. *Un placement assez précis est attendu. Le quadrillage sur la figure a été tracé dans ce but. Il n'y a ainsi pas nécessairement besoin d'un rapporteur.*

(a) $\frac{\pi}{6}$

(b) $-\frac{2\pi}{3}$

(c) $\frac{19\pi}{4}$