Prénom : ...
Nom : ...
Classe : 1ère

Bilan de Mathématiques (Sujet A)

***Le sujet est à rendre avec la copie**.*
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice **est autorisé** .*
*Il est rappelé que la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	4	Total
Points	6	9	8	6	29
Note					

Exercice 1 Analyse .... 6 pts

Une entreprise fabrique un engrais biologique. Chaque jour, le volume d'engrais fabriqué est compris entre 5 m^3 et 60 m^3.
Le coût moyen quotidien de production de cet engrais, exprimé **en centaines d'euros**, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[5;60]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 15x + 400}{x}$$

où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en m^3.

/1 1. Déterminer le coût moyen quotidien pour la production de 5 m^3 d'engrais.
/4 2. Dresser le tableau de variations de f.
/0,5 3. (a) Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen de production est-il minimal ?
/0,5 (b) Vérifier que le coût moyen minimal est alors de 2 500 €.

1. $f(5) = \frac{5^2-15\times5+400}{5} = 70$.
   Le coût moyen quotidien pour la production de 5 m^3 d'engrais est de 7 000 €.
2. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 - 15x + 400 \\ v(x) = x \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 2x - 15 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.
   On en déduit $f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ et on trouve $f'(x) = \frac{x^2-400}{x^2}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$.
   $x^2 - 400 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 400 \Leftrightarrow x \geqslant 20$ ou $x \leqslant -20$.
   On en déduit :

x	5		20		60
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	70	$\searrow$	25	$\nearrow$	$\frac{155}{3}$

3. *Lecture du tableau de variations.*

Exercice 2 Géométrie .... 9 pts

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $A(4;-1)$, $B(3;4)$ et $C(-1;1)$.
On note H le projeté orthogonal de C sur (AB).

/1 1. Tracer le repère et y placer les points A, B et C.

/2 2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

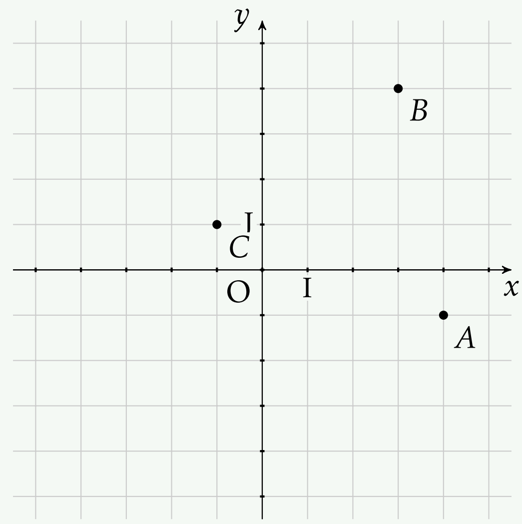
/1 3. (a) Justifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

/2 (b) En déduire que $AH = \frac{15\sqrt{26}}{26}$.

/2 4. Démontrer que la hauteur de ABC issue de C a pour longueur $\frac{23\sqrt{26}}{26}$.

/1 5. Calculer l'aire de ABC.

1.



2. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \times (-5) + 5 \times 2 = 15$.

3. (a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ car H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

On peut aussi le démontrer :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} \quad (*) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + 0 \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}\end{aligned}$$

(*) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

(b) On déduit de ce qui précède que $AB \times AH = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, soit $AH = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{26}$.

On en déduit $AH = \frac{15}{\sqrt{26}} = \frac{15\sqrt{26}}{26}$.

4. Le triangle AHC est rectangle en H.

On montre que $AC = \sqrt{29}$.

D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}CH^2 &= AC^2 - AH^2 \\ &= 29 - \frac{225}{26} \\ &= \frac{529}{26}\end{aligned}$$

Donc $CH = \frac{23\sqrt{26}}{26}$.

5. En considérant $[AB]$ comme base de ABC et en notant $\mathcal{A}$ l'aire de ABC :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{AB \times CH}{2} \\ &= \frac{\sqrt{26} \times \frac{23\sqrt{26}}{26}}{2} \\ &= \frac{23}{2}\end{aligned}$$

Exercice 3 Probabilités .... 8 pts

Une angine peut être provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne) soit par un virus (angine virale). On admet qu'un malade ne peut être à la fois porteur du virus et de la bactérie. L'angine est bactérienne dans 20% des cas.
Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne mais il présente des risques d'erreur :

- si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30% des cas ;
- si l'angine est virale, le test positif dans 10% des cas.

On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note :

- B l'évènement « l'angine est bactérienne » ;
- T l'évènement « le test effectué sur le malade est positif ».

Si besoin, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

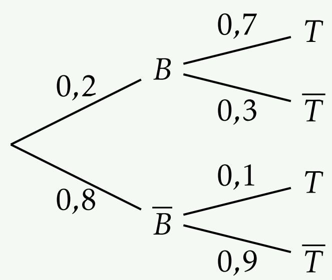
/2 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

/2 2. Quelle est la probabilité que l'angine soit bactérienne et que le test soit positif ?

/2 3. Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,22.

/2 4. Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif.
Quelle est la probabilité pour que son angine soit bactérienne ?

1.



2.

$$\begin{aligned}P(B \cap T) &= P(B) \times P_B(T) \\ &= 0{,}2 \times 0{,}7 \\ &= 0{,}14\end{aligned}$$

3. B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(T) &= P(B \cap T) + P(\overline{B} \cap T) \\ &= 0{,}14 + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(T) \\ &= 0{,}14 + 0{,}8 \times 0{,}1 \\ &= 0{,}14 + 0{,}08 \\ &= 0{,}22\end{aligned}$$

4.

$$P_T(B) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)}$$
$$= \frac{0,14}{0,22}$$
$$\approx 0,636$$

Exercice 4 Algèbre .... 6 pts

On observe l'évolution du nombre d'abonnés d'un youtubeur.
Chaque mois il conserve 60% de ses abonnés, et en a 100 nouveaux.
Au premier janvier 2022, il a 80 abonnés.

/2 1. Estimer le nombre d'abonnés au premier février 2022.

/2 2. On note u_n le nombre d'abonnés n mois après le premier janvier 2022.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

/2 3. Suivant ce modèle, combien ce youtubeur aura-t-il d'abonnés au premier avril 2022 ?

1. $80 \times 0,6 + 100 = 148$.
Donc au premier février 2022, il aura 148 abonnés suivant ce modèle.
2. $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 100$.
3. Le premier janvier 2022 correspond à 3 mois après le premier janvier 2022.
On doit donc calculer u_3.
On trouve : $u_2 \approx 189$.
Puis : $u_3 \approx \boxed{213}$.

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : 1ère

Bilan de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice* ***est autorisé*** *.*
Il est rappelé que la qualité de la ***rédaction****, la* ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	4	Total
Points	6	9	8	6	29
Note					

Exercice 1 Analyse .... 6 pts

Une entreprise fabrique un engrais biologique. Chaque jour, le volume d'engrais fabriqué est compris entre 5 m^3 et 60 m^3.

Le coût moyen quotidien de production de cet engrais, exprimé **en centaines d'euros**, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[5;60]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 15x + 400}{x}$$

où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en m^3.

/1 1. Déterminer le coût moyen quotidien pour la production de 5 m^3 d'engrais.

/4 2. Dresser le tableau de variations de f.

/0,5 3. (a) Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen de production est-il minimal ?

/0,5 (b) Vérifier que le coût moyen minimal est alors de 2 500 €.

1. $f(5) = \frac{5^2 - 15\times 5 + 400}{5} = 70$.
   Le coût moyen quotidien pour la production de 5 m^3 d'engrais est de 7 000 €.
2. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 - 15x + 400 \\ v(x) = x \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 2x - 15 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.
   On en déduit $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ et on trouve $f'(x) = \frac{x^2 - 400}{x^2}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$.
   $x^2 - 400 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 400 \Leftrightarrow x \geqslant 20$ ou $x \leqslant -20$.
   On en déduit :

x	5		20		60
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	70	$\searrow$	25	$\nearrow$	$\frac{155}{3}$

3. *Lecture du tableau de variations.*

Exercice 2 Géométrie .... 9 pts

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $A(4;-1)$, $B(3;4)$ et $C(-1;1)$.

On note H le projeté orthogonal de C sur (AB).

/1 1. Tracer le repère et y placer les points A, B et C.

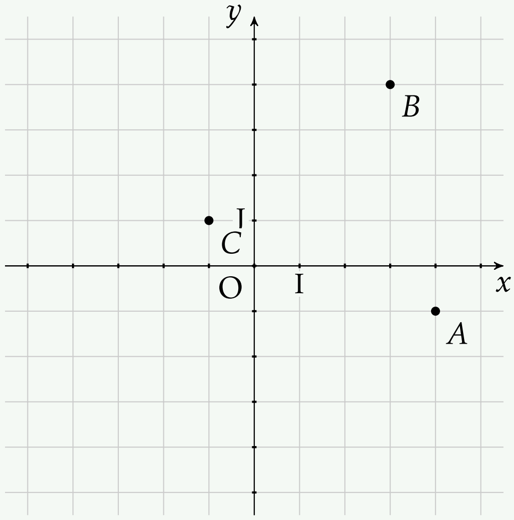
/2 2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

/1 3. (a) Justifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

/2 (b) En déduire que $AH = \frac{15\sqrt{26}}{26}$.

/2 4. Démontrer que la hauteur de ABC issue de C a pour longueur $\frac{23\sqrt{26}}{26}$.

/1 5. Calculer l'aire de ABC.

1. 

2. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \times (-5) + 5 \times 2 = 15$.

3. (a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ car H est le projeté orthogonal de C sur (AB).
   On peut aussi le démontrer :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} \quad (*) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + 0 \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}
\end{aligned}$$

   (*) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

   (b) On déduit de ce qui précède que $AB \times AH = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, soit $AH = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB}$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
   $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{26}$.
   On en déduit $AH = \frac{15}{\sqrt{26}} = \frac{15\sqrt{26}}{26}$.

4. Le triangle AHC est rectangle en H.
   On montre que $AC = \sqrt{29}$.
   D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
CH^2 &= AC^2 - AH^2 \\
&= 29 - \frac{225}{26} \\
&= \frac{529}{26}
\end{aligned}$$

   Donc $CH = \frac{23\sqrt{26}}{26}$.

5. En considérant $[AB]$ comme base de ABC et en notant $\mathcal{A}$ l'aire de ABC :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{AB \times CH}{2} \\ &= \frac{\sqrt{26} \times \frac{23\sqrt{26}}{26}}{2} \\ &= \frac{23}{2}\end{aligned}$$

Exercice 3 Probabilités .... 8 pts

Une angine peut être provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne) soit par un virus (angine virale). On admet qu'un malade ne peut être à la fois porteur du virus et de la bactérie. L'angine est bactérienne dans 20% des cas.

Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne mais il présente des risques d'erreur :

- si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30% des cas;
- si l'angine est virale, le test positif dans 10% des cas.

On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note :

- B l'évènement « l'angine est bactérienne »;
- T l'évènement « le test effectué sur le malade est positif ».

Si besoin, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

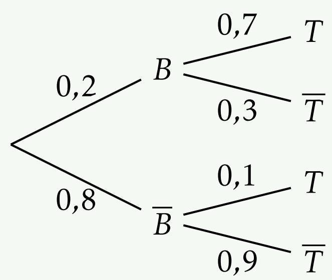
/2 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

/2 2. Quelle est la probabilité que l'angine soit bactérienne et que le test soit positif?

/2 3. Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,22.

/2 4. Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif.
Quelle est la probabilité pour que son angine soit bactérienne?

1.



2.

$$\begin{aligned}P(B \cap T) &= P(B) \times P_B(T) \\ &= 0{,}2 \times 0{,}7 \\ &= 0{,}14\end{aligned}$$

3. B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(T) &= P(B \cap T) + P(\overline{B} \cap T) \\ &= 0{,}14 + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(T) \\ &= 0{,}14 + 0{,}8 \times 0{,}1 \\ &= 0{,}14 + 0{,}08 \\ &= 0{,}22\end{aligned}$$

4.

$$P_T(B) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}14}{0{,}22} \approx 0{,}636$$

Exercice 4 Algèbre .... 6 pts

On observe l'évolution du nombre d'abonnés d'un youtubeur.
Chaque mois il conserve 60% de ses abonnés, et en a 100 nouveaux.
Au premier janvier 2022, il a 80 abonnés.

/2 1. Estimer le nombre d'abonnés au premier février 2022.

/2 2. On note u_n le nombre d'abonnés n mois après le premier janvier 2022.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

/2 3. Suivant ce modèle, combien ce youtubeur aura-t-il d'abonnés au premier avril 2022 ?

1. $80 \times 0{,}6 + 100 = 148$.
Donc au premier février 2022, il aura 148 abonnés suivant ce modèle.
2. $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 100$.
3. Le premier janvier 2022 correspond à 3 mois après le premier janvier 2022.
On doit donc calculer u_3.
On trouve : $u_2 \approx 189$.
Puis : $u_3 \approx \boxed{213}$.