Prénom : ...
Nom : ...
Classe : 1ère

Bilan de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice **est autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	4	Total
Points	12	4	9	11	36
Note					

Exercice 1 .... 12 pts

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{-3x-1}{x^2+5}$.

/1 (a) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f.

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $\begin{cases} u(x) = -3x-1 \\ v(x) = x^2+5 \end{cases}$
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+5>0$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

/3 (b) Calculer $f'(x)$.

On a : $\begin{cases} u'(x) = -3 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$
Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{-3\times\left(x^2+5\right)-(-3x-1)\times 2x}{\left(x^2+5\right)^2} \\ &= \frac{-3x^2-15-\left(-6x^2-2x\right)}{\left(x^2+5\right)^2} \\ &= \frac{3x^2+2x-15}{\left(x^2+5\right)^2} \end{aligned}$$

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}\left(x^2-1\right)$.

/1 (a) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f.

$f(x) = u(x)v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = x^2-1 \end{cases}$.
u est définie sur $[0,+\infty[$ et v est définie sur $\mathbb{R}$, donc f est définie sur $[0,+\infty[$ comme produit de fonctions définies sur $[0,+\infty[$.
u est dérivable sur $]0,+\infty[$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$, comme produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

/3 (b) Calculer $f'(x)$.

$f(x) = u(x)v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = x^2 - 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}. \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^2 - 1\right) + \sqrt{x} \times 2x \\ &= \frac{x^2 - 1}{2\sqrt{x}} + 2x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{x^2 - 1}{2\sqrt{x}} + \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x-5}$.

/1 (a) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f .

$f(x) = g(ax+b)$ avec $g(x) = \sqrt{x}$ et $ax + b = 2x - 5$.
g est définie sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.
Or $2x - 5 \in [0, +\infty[$ si et seulement si $x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$.
Donc f est définie sur $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$.
$2x - 5 \in]0, +\infty[$ si et seulement si $x \in \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$.
Donc f est dérivable sur $\left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$.

/3 (b) Calculer $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= ag'(ax+b) \\ &= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x-5}} \end{aligned}$$

Exercice 2 .... 4 pts

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

/2 1. Calculer $f'(x)$.

$f'(x) = 6x - 5$.

/2 2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

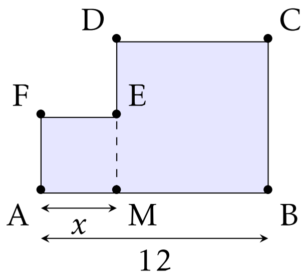
$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$f(-2) = 26$.
$f'(-2) = -17$.
Il suffit de remplacer $f'(a)$ et $f(a)$ par les valeurs calculées.
Après remplacement et développement, on trouve comme équation :

$$y = -17x - 8$$

Exercice 3 .... 9 pts

Sur un segment [AB] de longueur 12, on place un point M.
On construit deux carrés $AMEF$ et $BCDM$.
On pose $x = AM$.



/1 1. (a) Exprimer les aires des carrés $AMEF$ et $BCDM$ en fonction de x.

Aire de $AMEF = x^2$.
Aire de $BCDM = (12-x)^2 = 144 - 2\times 12\times x + x^2 = x^2 - 24x + 144$.

/1 (b) On note $f(x)$ la somme des aires des deux carrés. f est définie sur $[0;12]$.
Démontrer que $f(x) = 2x^2 - 24x + 144$.

$f(x) = x^2 + x^2 - 24x + 144 = 2x^2 - 24x + 144$.

/3 2. Déterminer la ou les valeur(s) de x telle que la somme des aires des deux carrés soit égale à 74.

$$\begin{aligned} f(x) = 12 &\Leftrightarrow 2x^2 - 24x + 144 = 12 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 24x + 70 = 0 \end{aligned}$$

$g(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -24$ et $c = 70$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4\times 2\times 70 = 16$.
On calcule x_1 et x_2 et on trouve $x_1 = \boxed{5}$ et $x_2 = \boxed{7}$.

/3 3. (a) En justifiant, dresser le tableau de variations de f

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-24}{2\times 2} = 6$.
$\beta = f(\alpha) = f(6) = 2\times 6^2 - 24\times 6 + 144 = 72$.
$a = 2 > 0$, donc $\mathscr{C}_f$ est tournée vers le haut.
Ainsi :

x	0		6		12
$f(x)$		$\searrow$	72	$\nearrow$	

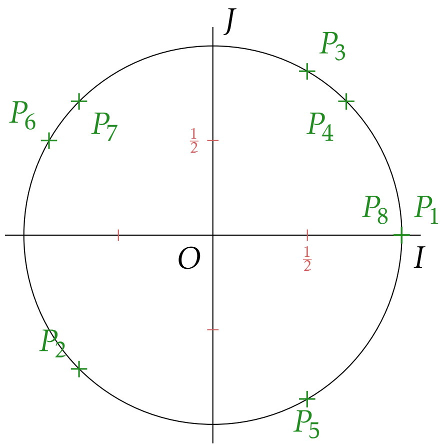
/1 (b) En déduire la valeur de x telle que la somme des aires des deux carrés soit minimale.

On en déduit que la somme des aires des deux carrés est minimale lorsque $AM = 6$, soit lorsque le point M est situé au milieu de [AB].

Exercice 4 .... 11 pts

/4 1. Dans chacun des cas, placer précisément le point image sur le cercle trigonométrique (on le nommera P_1, P_2, P_3...).

1. 2π	2. $-\frac{3\pi}{4}$	3. $-\frac{11\pi}{3}$
4. $\frac{9\pi}{4}$	5. $\frac{17\pi}{3}$	6. $-\frac{31\pi}{6}$
7. $\frac{11\pi}{4}$	8. -46π	



/3 2. Les réels $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{34\pi}{3}$ ont-ils le même point image sur le cercle trigonométrique ? *Justifier*.

On note $x = \frac{2\pi}{3}$ et $y = -\frac{34\pi}{3}$.
x et y ont le même point image, car $x - y = 12\pi = 6 \times 2\pi$

/2 3. Soit x un réel tel que $\cos(x) = 0{,}24$.
Déterminer toutes les valeurs exactes possibles de $\sin(x)$. *Justifier*.

$$\begin{aligned}
\cos(x) = 0{,}24 &\Rightarrow \sin^2(x) + 0{,}24^2 = 1 \\
&\Rightarrow \sin^2(x) = 1 - 0{,}24^2 \\
&\Rightarrow \sin(x) = \sqrt{1 - 0{,}24^2} \text{ ou } \sin(x) = -\sqrt{1 - 0{,}24^2} \\
&\Rightarrow \sin(x) \approx 0{,}97 \text{ ou } \sin(x) \approx -0{,}97
\end{aligned}$$

/2 4. Sans justifier, résoudre sur $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\sin(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{S = \left[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right]}$$

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : 1ère

Bilan de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice **est autorisé** .*
*Il est rappelé que la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	4	Total
Points	12	4	9	11	36
Note					

Exercice 1 .... 12 pts

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{-4x+2}{x^2+3}$.

/1 (a) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f .

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $\begin{cases} u(x) = -4x+2 \\ v(x) = x^2+3 \end{cases}$
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+3 > 0$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

/3 (b) Calculer $f'(x)$.

On a : $\begin{cases} u'(x) = -4 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$
Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{-4 \times \left(x^2+3\right) - (-4x+2) \times 2x}{\left(x^2+3\right)^2} \\ &= \frac{-4x^2 - 12 - \left(-8x^2+4x\right)}{\left(x^2+3\right)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 4x - 12}{\left(x^2+3\right)^2} \end{aligned}$$

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}\left(x^2+1\right)$.

/1 (a) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f.

$f(x) = u(x)v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = x^2+1 \end{cases}$.
u est définie sur $[0, +\infty[$ et v est définie sur $\mathbb{R}$, donc f est définie sur $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions définies sur $[0, +\infty[$.
u est dérivable sur $]0, +\infty[$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$, comme produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.

/3 (b) Calculer $f'(x)$.

$f(x) = u(x)v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = x^2 + 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}. \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^2+1\right) + \sqrt{x} \times 2x \\ &= \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} + 2x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} + \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{5x^2+1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4x+3}$.

/1 (a) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f .

$f(x) = g(ax+b)$ avec $g(x) = \sqrt{x}$ et $ax + b = 4x + 3$.
g est définie sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.
Or $4x + 3 \in [0, +\infty[$ si et seulement si $x \in \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right[$.
Donc f est définie sur $\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right[$.
$4x + 3 \in]0, +\infty[$ si et seulement si $x \in \left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$.
Donc f est dérivable sur $\left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

/3 (b) Calculer $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= ag'(ax+b) \\ &= 4 \times \frac{1}{2\sqrt{4x+3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4x+3}} \end{aligned}$$

Exercice 2 .... 4 pts

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 7x + 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

/2 1. Calculer $f'(x)$.

$f'(x) = 2x - 7$.

/2 2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

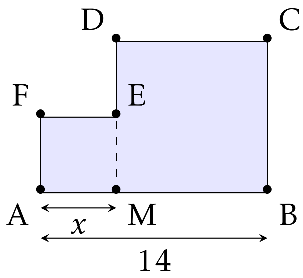
$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$f(-3) = 32$.
$f'(-3) = -13$.
Il suffit de remplacer $f'(a)$ et $f(a)$ par les valeurs calculées.
Après remplacement et développement, on trouve comme équation :

$$y = -13x - 7$$

Exercice 3 .... 9 pts

Sur un segment [AB] de longueur 14, on place un point M.
On construit deux carrés $AMEF$ et $BCDM$.
On pose $x = AM$.



/1 1. (a) Exprimer les aires des carrés $AMEF$ et $BCDM$ en fonction de x.

Aire de $AMEF = x^2$.
Aire de $BCDM = (14-x)^2 = 196 - 2 \times 14 \times x + x^2 = x^2 - 28x + 196$.

/1 (b) On note $f(x)$ la somme des aires des deux carrés. f est définie sur $[0;14]$.
Démontrer que $f(x) = 2x^2 - 28x + 196$.

$f(x) = x^2 + x^2 - 28x + 196 = 2x^2 - 28x + 196$.

/3 2. Déterminer la ou les valeur(s) de x telle que la somme des aires des deux carrés soit égale à 106.

$$\begin{aligned} f(x) = 14 &\Leftrightarrow 2x^2 - 28x + 196 = 14 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 28x + 90 = 0 \end{aligned}$$

$g(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -28$ et $c = 90$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-28)^2 - 4 \times 2 \times 90 = 64$.
On calcule x_1 et x_2 et on trouve $x_1 = \boxed{5}$ et $x_2 = \boxed{9}$.

/3 3. (a) En justifiant, dresser le tableau de variations de f

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-28}{2 \times 2} = 7$.
$\beta = f(\alpha) = f(7) = 2 \times 7^2 - 28 \times 7 + 196 = 98$.
$a = 2 > 0$, donc $\mathscr{C}_f$ est tournée vers le haut.
Ainsi :

x	0	7	14
$f(x)$	$\searrow$	98	$\nearrow$

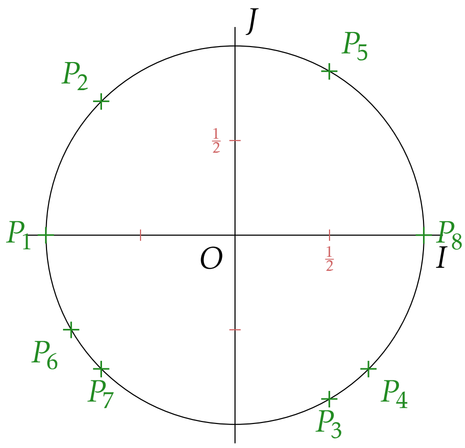
/1 (b) En déduire la valeur de x telle que la somme des aires des deux carrés soit minimale.

On en déduit que la somme des aires des deux carrés est minimale lorsque $AM = 7$, soit lorsque le point M est situé au milieu de [AB].

Exercice 4 .... 11 pts

/4 1. Dans chacun des cas, placer précisément le point image sur le cercle trigonométrique (on le nommera P_1, P_2, $P_3 \ldots$).

1. 3π
2. $\frac{3\pi}{4}$
3. $\frac{11\pi}{3}$
4. $-\frac{9\pi}{4}$
5. $-\frac{17\pi}{3}$
6. $\frac{31\pi}{6}$
7. $-\frac{11\pi}{4}$
8. 46π



/3 2. Les réels $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{35\pi}{6}$ ont-ils le même point image sur le cercle trigonométrique ? *Justifier*.

On note $x = \frac{\pi}{6}$ et $y = -\frac{35\pi}{6}$.
x et y ont le même point image, car $x - y = 6\pi = 3 \times 2\pi$

/2 3. Soit x un réel tel que $\cos(x) = 0{,}76$.
Déterminer toutes les valeurs exactes possibles de $\sin(x)$. *Justifier*.

$$\begin{aligned}
\cos(x) = 0{,}76 &\Rightarrow \sin^2(x) + 0{,}76^2 = 1 \\
&\Rightarrow \sin^2(x) = 1 - 0{,}76^2 \\
&\Rightarrow \sin(x) = \sqrt{1 - 0{,}76^2} \text{ ou } \sin(x) = -\sqrt{1 - 0{,}76^2} \\
&\Rightarrow \sin(x) \approx 0{,}65 \text{ ou } \sin(x) \approx -0{,}65
\end{aligned}$$

/2 4. Sans justifier, résoudre sur $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\boxed{S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]}$$